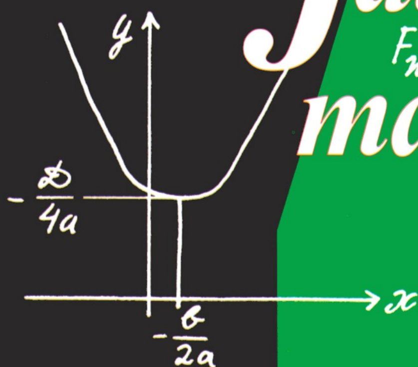


$$xf(x)+2f(1-x)=x^2+6$$

$$\sqrt{x^2+(8-y)^2}+\sqrt{y^2+(6-x)^2}$$

Jaunajam matematikui

$$F_n \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$$



$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{AC}$$

LIETUVOS
JAUNŲJŲ
MATEMATIKŲ
MOKYKLA
LJMM

$$f(x)=|x-1|+|x+1|$$

$$\pi^2(k+1)^2-\pi^2k^2=\pi^2(2k+1)$$

$$1=4\sin\frac{\pi}{10}\left[1-2\sin^2\frac{\pi}{10}\right].$$

$$m_3=m_{12}+m_{13}+m_{23}$$

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

4

2001–2003 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Danieliaus leidykla

Vilnius, 2003

UDK 51(076.1)
Ja712

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį recenzavo Marytė STRIČKIENĖ ir Vidmantas PEKARSKAS

Leidinį redagavo Joana PRIBUŠAUSKAITĖ

ISBN 9955-476-20-6

TURINYS

PRATARMĖ

Leisdami knygeles „Jaunajam matematikui" siekiame ne tik sukaupti, bet ir paskleisti šalies vidurinėse mokyklose Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos klausytojų studijuojamą metodinę medžiagą. Norėtume atkreipti skaitytojų dėmesį, kad kiekvienam klausytojų srautui sudaroma vis nauja dvejų metų programa. Paprastai vengiama temų pasikartojimo, o jei ir kartojamasi, tai tos pačios temos nagrinėjamos skirtingais aspektais. Todėl visos mūsų leidžiamos knygelės galėtų būti naudingos ir vyresniųjų klasių moksleiviams, ir matematikos mokytojams.

Šioje, ketvirtojoje, knygelėje skaitytojas ras tokias temas: skaičiavimo sistemos, antros eilės kreivės, įdomioji logika, atvirkštinės funkcijos, optimizavimo uždaviniai, kombinatorika, atsitiktiniai dydžiai, kompleksiniai skaičiai. Tai 2001–2003 mokslo metų LJMM programa. Dauguma šios programos temų neįeina į vidurinės mokyklos matematikos programą, tačiau joms suprasti visiškai pakanka mokyklinės matematikos žinių. Tikimės, kad ši knygelė praplės moksleivių akiratį, o įgytos papildomos matematikos žinios jiems pravers studijuojant aukštojoje mokykloje.

Nuoširdžiai dėkojame straipsnių autoriams, redaktorei Joanai Pribušauskaitei ir recenzentams – mokytojai ekspertei Marytei Stričkienei ir profesoriui Vidmantui Pekarskui.

Ši knygelė nebūtų pasiekusi skaitytojo be nuoširdaus ir kruopštaus Kristinos Lyndienės darbo renkant ir maketuojant tekstą. Ačiū jai.

Antanas Apynis,
Eugenijus Stankus,
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga
ir užduotys



STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas), Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Suprastinkite reiškinį:

$$\frac{\left(a+\sqrt{4a}+1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{8b^3}\right)}{\left(\left(\sqrt[4]{2b}-\sqrt[4]{a}\right)^2+\left(\sqrt[4]{2b}+\sqrt[4]{a}\right)^2\right)\left(a-\sqrt{2ab}+2b\right)}-0{,}5\sqrt{a}\,.$$

2. Įrodykite lygybę $\dfrac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$.

3. Raskite visus natūraliuosius triženklius skaičius, turinčius šias savybes:
1) pirmasis skaitmuo tris kartus mažesnis už paskutinįjį;
2) paties skaičiaus ir skaičiaus, gauto sukeitus antrąjį skaitmenį su trečiuoju, suma dalijasi iš 8.

4. Du sportininkai bėga stadiono takeliu pastoviais, bet skirtingais greičiais. Pirmasis vieną ratą apibėga 5 sek. greičiau už antrąjį. Kai šie sportininkai vienu metu startuoja ta pačia kryptimi, tai pirmasis aplenkia antrąjį vienu ratu po $4\frac{2}{3}$ min. Po kiek laiko jie susitiktų kartu startavę priešingomis kryptimis?

5. Išspręskite nelygybę $\dfrac{|x+3|+x}{x+2}>1$.

6. Išspręskite nelygybių sistemą

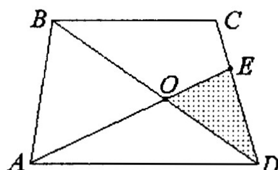
$$\begin{cases}(x-2)\sqrt{x^2-5{,}5x+6}\geq 0,\\(x+1)\sqrt{x^2+0{,}5x-3}\leq 0.\end{cases}$$

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+2y} + y = 2, \\ \dfrac{y}{x+2y} = -3. \end{cases}$$

8. Apskaičiuokite $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\left(a^2 - 3\right)a}$, kai $\sin x + \cos x = a$.

9. Taškas E trapecijos $ABCD$ kraštinę CD dalija santykiu 1:2. Atkarpos BD ir AE kertasi taške O. Apskaičiuokite trikampio OED plotą, kai $AO = 2OE$, o trikampio ABO plotas lygus 1.



10. Taisyklingosios trikampės piramidės sienos kampas prie viršūnės yra status. Apskaičiuokite šios piramidės tūrį, kai jos aukštinė lygi h.



I. SKAIČIAVIMO SISTEMOS

Gediminas Stepanauskas
(Vilniaus universitetas)

1. Skaičiai ir jų rašymo būdas yra viena iš pagrindinių matematikos idėjų. Skaičiaus sąvoka žmonijos istorijoje atsirado gana vėlai. Praktiškas metodas skaičiuoti lyginant galėjo atsirasti, kai žmonės pradėjo gyventi sėsliai, įkūrė pirmąsias gyvenvietes, pradėjo auginti žemės ūkio kultūras ir naminius gyvulius. Jau pirmykščiai žmonės pradėjo suprasti, kad trys vištos ir trys šunys turi kažką bendra. Pamažu pradėta galvoti apie skaičius, nesusietus su daiktais. Buvo sugalvoti skaičių vardai ir sukurti simboliai jiems žymėti.

Skaičiavimo sistema (skaičiuotė) – tai keletas pagrindinių simbolių skaičiams žymėti ir kelios taisyklės, kurias taikant galima sudaryti simbolius kitiems skaičiams žymėti. Pagrindiniai skaičiavimo sistemos simboliai vadinami *skaitmenimis*.

Patogi skaičiavimo sistema yra vienas iš didžiausių žmonijos laimėjimų. Praėjo šimtmečiai, kol skaičiavimo sistema tapo tokia, kokią mes šiandien turime.

Skaičiavimo sistemų buvo daug. Istorijoje buvo daug skaičiavimo sistemų. Keletą jų paminėsime. Amžiams bėgant susiformavo trijų pagrindinių tipų skaičiavimo sistemos: *paprastojo grupavimo, multiplikatyviojo grupavimo* ir *pozicinės sistemos*. Jas trumpai aptarsime. Be skaičiavimo sistemos tipo, turi būti nustatytas pagrindinės grupės (grupuojant ir užrašant skaičius) didumas, kuris vadinamas *skaičiavimo sistemos pagrindu*. Jei pagrindas lygus n, tai skaičiavimo sistema vadinama n-taine. Mūsų naudojama skaičiavimo sistema yra *dešimtainė*.

2. Paprastosios (dar sakoma *adityviosios*) grupavimo sistemos pagrindo laipsniams (retais atvejais ir kai kuriems kitiems skaičiams) žymėti naudojami specialūs simboliai. Visi kiti skaičiai gaunami sudedant visus simbolių grupe pažymėtus skaičius.

Prieš 5000 metų egiptiečiai jau naudojosi dešimtaine paprastojo grupavimo sistema. Simboliai skaičiams žymėti buvo jų hieroglifų sistemos dalis. Jie naudojo septynis hieroglifus (1 pav.) ir galėjo užrašyti

skaičius iki 9 999 999. Pavyzdžiui, skaičius 120234 egiptiečių hieroglifais buvo užrašomas taip:

𓆛𓂭𓂭𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺.

Skaičius	**Egiptiečių hieroglifas**	**Objektas, kurį vaizduoja simbolis**
1	𓏺	Vertikalus brūkšnys
10	𓎆	Arka
100	𓍢	Spiralė
1 000	𓆼	Lotoso žiedas
10 000	𓂭	Pasvirusi nendrė
100 000	𓆛	Žuvis
1 000 000	𓁨	Apstulbęs žmogus

1 pav.

Savo skaičiavimams egiptiečiai naudodavo ir vienetines trupmenas $\frac{1}{n}$. Kitokios (nevienetinės) trupmenos buvo rašomos skirtingų vienetinių trupmenų (pakartoti tą pačią vienetinę trupmeną nebuvo galima) suma. Pavyzdžiui, $\frac{3}{7}$ rašydavo $\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}$. Toks užrašas nebuvo vienintelis. Tas pačias $\frac{3}{7}$ galima užrašyti kaip $\frac{1}{3}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$ arba dar kaip nors kitaip.

3. Graikų skaičiavimo sistema buvo sukurta ir naudojama nuo 600 m. pr. Kr. iki 100 m. po Kr. skaičiams užrašyti graikai naudojo 27 raides: 24 rašto abėcėlės ir tris nebevartojamas raides (2 pav.). Šiomis raidėmis skaičių graikai užrašydavo kaip žodį. Buvo naudojama dešimtainė sistema. Pavyzdžiui, $\phi\nu\varepsilon$ atitinka skaičių $500+50+5=555$. Graikų sistema turėjo multiplikatyviosios skaičiavimo sistemos bruožų. Simbolis ' reiškė daugybą iš 1 000, o simbolis M – daugybą iš 10 000. Pavyzdžiui,

$$\gamma M\delta'\pi\eta = 3 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 1\,000 + 80 + 8 = 34\,088.$$

Graikų skaičiavimo sistema nebuvo patogi skaičiavimams atlikti. Išsiplėtus Romos imperijai apie 100 m. po Kr., ją visiškai išstūmė efektyvesnė romėnų sistema.

Graikiškieji skaitmenys

1	α	10	ι	100	ρ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	φ
6	ς	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	ο	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	θ	90	ϙ	900	ϡ

2 pav.

4. Romėnų skaičiavimo sistema buvo kuriama nuo 500 m. pr. Kr. iki 100 m. po Kr., ji vartojama dar ir šiandien. Tiesa, daugiausia tik dekoratyviniais tikslais, – puslapiams, knygų skyriams numeruoti ir pan. Pagrindiniai romėniškieji skaitmenys pateikti 3 pav. Romėnų sistema paremta grupavimo principu.

Skaičius	Romėniškasis skaitmuo
1	I
5	V
10	X
50	L
100	C
500	D
1000	M

3 pav.

Negalima sakyti, kad ji yra grynai dešimtainė. Greta pagrindinio sistemos pagrindo *dešimt*, naudojamas ir šalutinis *penki*. Dėl to

skaičiams romėnų skaičiavimo sistemoje užrašyti reikia mažiau simbolių negu egiptiečių sistemoje. Romėnų skaičiai rašomi pagrindinius skaitmenis dėstant iš kairės į dešinę mažėjimo tvarka. Tačiau yra kelios išimtys. Taupydami vietą, romėnai savo skaičiavimo sistemoje įvedė atimties principą, keletą skaičių užrašydami priešinga tvarka. Daugiareikšmiškumo išvengiama atimties principą taikant tik nurodytais 4 pav. atvejais.

Skaičius	**Romėniškasis skaitmuo**
4	IV
9	IX
40	XL
90	XC
400	CD
900	CM

4 pav.

Pavyzdžiui, negalima rašyti IVX, nes neaišku, ar $IVX = (10-5)-1 = 4$, ar $IVX = 10-(5-1) = 6$. Dideliems skaičiams romėnų sistemoje naudojamas horizontalus brūkšnys, užrašomas virš skaičiaus ir reiškiantis daugybą iš 1000. Štai keletas romėnų skaičiavimo sistemos skaičių

$$\mathrm{MMDCCXXXVII} = \mathrm{MM\ DCC\ XXX\ VII} = 2737,$$

$$\mathrm{MMCMXCIII} = \mathrm{MM\ CM\ XC\ III} = 2993,$$

$$\overline{\mathrm{XXXI}} = 31\,000,$$

$$\overline{\overline{\mathrm{VIII}}} = 8\,000\,000,$$

$$\overline{\mathrm{MIX}}\mathrm{DCXCIX} = \overline{\mathrm{MIX}}\ \mathrm{DC\ XC\ IX} = 1009 \cdot 1000 + 699 = 1\,009\,699.$$

5. Adityviojoje skaičiavimo sistemoje simbolio vieta skaičiuje visiškai nesvarbi. Juk simbolių rinkiniai ?∩∩I ir I∩?∩ egiptiečių skaičiavimo sistemoje reiškia tą patį skaičių 121. Naudojant multiplikatyviąją skaičiavimo sistemą, simbolių skaičiaus užraše vieta taip pat nėra svarbi, bet pagrindinio simbolio jau nebegalima atskirti nuo jo daugiklio. Galima keisti vietomis tik simbolių poras. Graikų skaičiavimo sistemoje

$$\sigma\mu\beta = \mu\beta\sigma = 242,$$

bet

$$\sigma M\beta = 200 \cdot 10\,000 + 2 = 2\,000\,002 \neq \sigma\beta M = 200 + 2 \cdot 10\,000 = 20\,200.$$

Žinoma, patogiau, kai tos poros surašytos tvarkingai. Turint tuščios vietos arba daugiklio nulio simbolį ir susitarus, kad skaičiavimo sistemos simboliai išdėstyti visada ta pačia tvarka, galima praleisti pačius simbolius, o palikti tik jų daugiklius. Taip gaunama *pozicinė* skaičiavimo sistema. Mūsų naudojamuose skaičiuose taip ir yra. Pavyzdžiui, skaičiuje

$$121 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 1$$

iš tikrųjų yra praleisti šimtų, dešimčių ir vienetų simboliai, o palikti tik jų skaičiai (daugikliai).

Šiandien visas pasaulis naudoja indų-arabų skaičiavimo sistemą. Tai dešimtainė pozicinė skaičiavimo sistema. Skaičiams užrašyti yra dešimt pagrindinių simbolių: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Mūsų skaičiavimo sistema yra kilusi iš Indijos. Apie 300 m. pr. Kr. indai naudojo mūsų pagrindinių skaitmenų, išskyrus nulį, pirmtakus. Tiksli nulio išradimo data nežinoma. Bet jis greičiausiai atkeliavo į Indiją iš vėlyvojo Babilono periodo per graikų pasaulį. Iš Indijos skaičiavimo sistema pirmiausia išplito arabų kraštuose, vėliau – visoje Europoje ir pasaulyje.

6. Žmogus turi dešimt pirštų, taigi jie ir buvo pirmoji skaičiavimo priemonė. Dešimt vienetų buvo pakeičiama viena dešimtimi, dešimt dešimčių – vienu šimtu, dešimt šimtų – vienu tūkstančiu ir t.t. Todėl labiausiai paplitusi ir buvo dešimtainė skaičiavimo sistema. Nors būta ir kitokių. Majų skaičiavimo sistema buvo dvidešimtainė, o babiloniečių net šešiasdešimtainė.

Mūsų laikais, kompiuterių amžiuje, aktualios pasidarė ir kitokios skaičiavimo sistemos. Naudojama dvejetainė, aštuntainė, šešioliktainė ir kai kurios kitos sistemos.

Dešimtainės sistemos simbolius mes gerai žinome. n-tainės pozicinės sistemos pagrindiniams skaitmenims užrašyti reikia n skirtingų simbolių. Jei skaičiavimo sistemos pagrindas mažesnis už dešimt, naudosime pirmuosius dešimtainės sistemos skaitmenis, o jei pagrindas yra didesnis už dešimt, pridėsime keletą didžiųjų lotynų abėcėlės raidžių. Be to, jei sistemos pagrindas nėra dešimt, prie skaičiaus rašysime indeksą, žymintį sistemos, kurioje jis užrašytas, pagrindą. Taigi

dvejetainėje sistemoje naudosime simbolius 0 ir 1, aštuntainėje – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, o dvyliktainėje – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, T, E. Septintainės sistemos skaičių „dvylika“ rašysime taip: 12_7.

Kaip skaičius, užrašytus vienokio pagrindo sistema, užrašyti kitokio pagrindo sistema? Suprantant pozicinės skaičiavimo sistemos esmę, situacija paaiškės panagrinėjus keletą pavyzdžių. Penketainės skaičiavimo sistemos skaičius 122_5, užrašytas dešimtaine sistema, yra lygus 37, nes

$$122_5 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 2 = 37,$$

o dvyliktainis skaičius

$$1T12_{12} = 1 \cdot 12^3 + 10 \cdot 12^2 + 1 \cdot 12 + 2 = 3182.$$

Dešimtainės skaičių sistemos skaičių 132 užrašykime ketvirtaine sistema. Kadangi

$$132 = 33 \cdot 4 = (8 \cdot 4 + 1) \cdot 4 = ((2 \cdot 4) \cdot 4 + 1) \cdot 4 =$$
$$= 2 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4 = 2 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0,$$

tai $132 = 2010_4$.

7. Mūsų naudojama pozicinė skaičiavimo sistema amžiams bėgant nugalėjo kitas skaičiavimo sistemas, kadangi yra labai patogi skaičiavimams atlikti. Aritmetinių operacijų (sudėties ir daugybos) esmė yra sistemos poziciškumas, bet ne pagrindas. Aritmetinių operacijų atlikimas dešimtainėje ir *n*-tainėje sistemose yra panašus. Reikia tik mokėti ar turėti po ranka sudėties ir daugybos lenteles. Penketainės sistemos sudėties ir daugybos lentelės pateiktos 5 pav. Visi skaičiai lentelėse užrašyti penketainėje sistemoje (penketainės sistemos indeksas praleistas).

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

5 pav. Penketainės skaičiavimo sistemos sudėties ir daugybos lentelės

Turint šias lenteles nesunku atlikti penketainių skaičių sudėtį ir daugybą. Pavyzdžiui,

$$
\begin{array}{r}
134_5 \\
+\;231_5 \\
\hline
420_5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
134_5 \\
\times\;231_5 \\
\hline
134_5 \\
1012_5 \\
323_5 \\
\hline
43104_5
\end{array}
$$

Su skaičiavimo sistemų kūrimo ir tobulinimo būdais, sistemų istoriniais pavyzdžiais moksleiviai gali plačiau susipažinti autoriaus straipsnyje „Skaičiavimo sistemos", išspausdintame *Alfa plius omega: matematikos ir informatikos žurnale*. 2000, Nr. 2. P. 30–38.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Trupmenas $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{7}{17}$, $\frac{47}{60}$ užrašykite vienetinių (egiptiečių) trupmenų suma. Pateikite bent po du skirtingus užrašymo būdus.

2. Vietoje raidžių R, G, E ir I įrašykite jas atitinkančius skaičius ir pabaikite užpildyti lentelę.

Indų-arabų skaičiavimo sistema	Romėnų skaičiavimo sistema	Graikų skaičiavimo sistema	Egiptiečių skaičiavimo sistema
	R		
		G	
			E
I			

R= MMMMDCCCLXXIII,G= α''γMγ'ρνδ ,

E= (𓍢𓍢∩|||||||||, I= 482.

3. Keturženklio skaičiaus skaitmenų suma yra 10. Sukeitę pirmąjį ir paskutinįjį skaitmenis vietomis, gausime naują 2997 vienetais didesnį skaičių. Jei sukeisime du vidurinius pradinio skaičiaus skaitmenis, tai gautas skaičius bus 90 vienetų didesnis. Šio paskutiniojo padidinto skaičiaus ir pradinio skaičiaus suma yra lygi 2558. Suraskite pradinį skaičių.

4. Dešimtainės sistemos skaičių 99 užrašykite dvejetainės, penketainės, aštuntainės ir dvyliktainės sistemos skaičiais.

5. Skaičius 100101_2, 34101_5, 7301_8, $34E01_{12}$ užrašykite dešimtainės sistemos skaičiais.

6. Išspręskite lygtis:

a) $23_{12} = 43_x$,

b) $37_8 = x_5$,

c) $x_{12} = 100010_2$.

7. Sudarykite aštuntainės sistemos sudėties ir daugybos lenteles.

8. a) Naudodamiesi 7-ajame uždavinyje sudarytomis lentelėmis sudėkite:

$$\begin{array}{r} 365_8 \\ +\ 4071_8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 245_8 \\ +\ 345_8 \\ 466_8 \\ \hline \end{array}$$

b) Naudodamiesi 7-ajame uždavinyje sudarytomis lentelėmis sudauginkite:

$$\begin{array}{r} 212_8 \\ \times\ 43_8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6073_8 \\ \times\ 56_8 \\ \hline \end{array}$$

9. Yra žinoma dalumo taisyklė: dešimtainės sistemos skaičius dalijasi iš 9 tada ir tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9. Įrodykite

šios taisyklės analogą trejetainėje sistemoje: trejetainės sistemos skaičius dalijasi iš 2 tada ir tik tada, kai šio skaičiaus trejetainių skaitmenų suma dalijasi iš 2. Užrašykite šios taisyklės apibendrinimą n-tainei sistemai.

10. Trijose kortelėse A, B, C surašyti skaičiai nuo 1 iki 7:

6	4
7	5

A

6	2
7	3

B

5	1
7	3

C

Kai kurie iš skaičių kartojasi po kelis kartus. Sugalvoję bet kokį skaičių nuo 1 iki 7, o po to sudėję tų kortelių, kuriose mūsų sugalvotas skaičius užrašytas, viršutinio dešiniojo kampo skaičius, gausime sugalvotąjį skaičių. Pavyzdžiui, 6 yra užrašytas kortelėse A ir B. Viršutiniai dešinieji šių kortelių skaičiai yra 4 ir 2. Juos sudėję ir gauname 6.

Surašykite skaičius nuo 1 iki 15 ant keturių kortelių (skaičiai gali kartotis) taip, kad paėmę bet kokį skaičių nuo 1 iki 15 ir sudėję tų kortelių, ant kurių paimtas skaičius užrašytas, viršutinių dešiniųjų kampų skaičius, gautumėte parinktą skaičių.

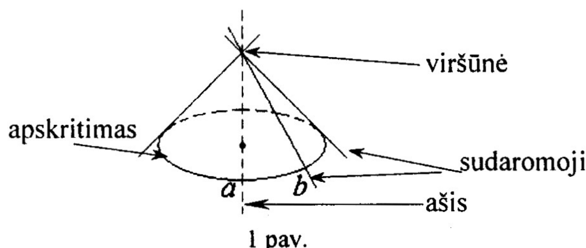


2. ANTROSIOS EILĖS KREIVĖS

Petras Vaškas
(Vilniaus universitetas)

1. KŪGIO PJŪVIAI

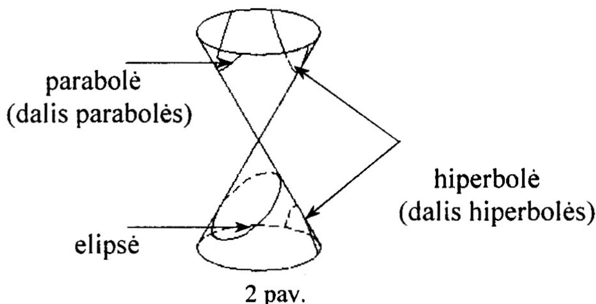
Žinote kūgio (sukimosi kūgio) ir jo šoninio paviršiaus sąvokas. Nagrinėkime dvi susikertančiąsias tieses a ir b (1 pav.).



1 pav.

Tiesę b apsukę apie tiesę a, gausime apskritąjį kūginį paviršių (atskirą kūginio paviršiaus atvejį). Minėtas kūgio šoninis paviršius yra apskritojo kūginio paviršiaus tam tikra dalis.

Apskritąjį kūginį paviršių perkirtę įvairiomis plokštumomis, neinančiomis per jo viršūnę, gausime kreives, kurios vadinamos kūgio pjūviais. Tai gali būti parabolė, hiperbolė, elipsė (atskiru atveju apskritimas) (2 pav.). Kurią kreivę gausime, priklauso nuo kampo, kurį kertančioji plokštuma sudaro su kūginio paviršiaus ašimi.



2 pav.

Visus kūgio pjūvius galima gauti kišeniniu žibintuvėliu skirtingais kampais apšviečiant plokščią paviršių (tiesa, matytume tik vieną hiperbolės šaką).

Senovės Graikijos matematikai nagrinėjo tik tokius kūginių paviršių pjūvius, kurių plokštuma statmena kuriai nors kūgio sudaromajai. Įvairias kreives gaudavo keisdami kampą tarp kūgio sudaromosios ir ašies.

Saulės sistemos kūnai apie Saulę skrieja elipsėmis. Dangaus kūnai, patenkantys į Saulės sistemą iš kitų žvaigždžių sistemų, skrieja hiperbolinėmis orbitomis ir, jei jų skriejimui Saulės sistemos planetos nepadaro esminės įtakos, palieka Saulės sistemą ta pačia orbita. Dirbtiniai Žemės palydovai ir jos natūralusis palydovas Mėnulis skrieja elipsinėmis orbitomis. Kosminiai laivai, paleisti į kitas planetas, nustojus veikti varikliams, skrieja elipsinėmis orbitomis.

Kūgio pjūviai dar vadinami antrosios eilės kreivėmis. Tokio pavadinimo esmę išsiaiškinsime vėliau.

2. PARABOLĖ, HIPERBOLĖ, APSKRITIMAS, ELIPSĖ

9 klasėje parabole pavadintas kvadratinės funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafikas. Lygtis $y = ax^2 + bx + c$ dar vadinama *parabolės lygtimi*.

Tas grafikas tik padėtimi plokštumoje skiriasi nuo funkcijos $y = ax^2$ ($a > 0$) grafiko, todėl toliau, kad būtų paprasčiau, laikysime, kad parabolės lygtis yra $y = ax^2$.

9 klasėje hiperbole pavadintas atvirkštinio proporcingumo – funkcijos $y = \frac{k}{x}$ grafikas. Tokios hiperbolės lygtis dažnai užrašoma šitaip: $xy = k$. (Tokia hiperbolė neribotai artėja prie dviejų viena kitai statmenų tiesių – koordinačių ašių. Tos tiesės vadinamos *hiperbolės asimptotėmis*. Yra hiperbolių, kurių asimptotės nėra viena kitai statmenos.)

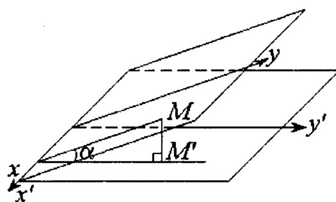
Apskritimas apibrėžiamas jau 5 klasėje. 9 klasėje gaunama apskritimo, kurio centras $C(a; b)$, spindulys lygus r, lygtis:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Kai apskritimo centras yra koordinačių pradžia ($a=0$, $b=0$), apskritimo lygtis yra paprastesnė:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Elipse vadinama apskritimo lygiagrečioji projekcija. (Apie lygiagretųjį projektavimą kalbama 10 klasėje.) Kad būtų paprasčiau, pasirinkime statmenąjį projektavimą (kai projektavimo kryptis statmena projekcijų plokštumai). Sudarysime elipsės lygtį.



3 pav.

3 paveiksle:

$M(x;\, y)$ – apskritimo taškas, todėl

$$x^2+y^2=r^2;$$

$M'(x';\, y')$ – elipsės taškas; aišku, kad

$$x=x',\ y=\frac{y'}{\cos\alpha};$$

$$x'^2+\left(\frac{y'}{\cos\alpha}\right)^2=r^2;$$

$$\frac{x'^2}{r^2}+\frac{y'^2}{r^2\cos^2\alpha}=1.$$

Tai lygtis, kurią tenkina elipsės taškų koordinatės. Galėtume įsitikinti, kad ir atvirkščiai: jei x', y' tenkina gautą lygtį, tai taškas $(x';\, y')$ yra elipsės taškas. Vadinasi, gauta lygtis yra elipsės lygtis.

Dažnai žymima

$$r=a,\ r\cos\alpha=b \text{ (aišku, } a>b\text{)}$$

ir elipsės lygtis užrašoma šitaip:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

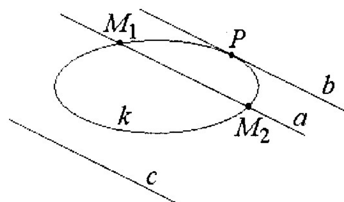
3. ANTROSIOS EILĖS KREIVĖS

Parabolės, hiperbolės, apskritimo ir elipsės lygtys

$$y=ax^2,\ xy=k,\ x^2+y^2=r^2,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

yra antrojo laipsnio lygtys. Todėl jų nusakomos kreivės vadinamos *antrosios eilės kreivėmis*. (Kitų antrojo laipsnio lygtimis nusakomų kreivių čia nenagrinėsime.) Tai bendras algebrinis tų kreivių požymis.

Antrosios eilės kreivių būdinga geometrinė savybė šitokia: bendruoju atveju antrosios eilės kreivė ir tiesė turi du bendrus taškus. 4 paveiksle tai tiesės a ir kreivės k bendri taškai M_1 ir M_2. Atkarpa M_1M_2 vadinama *antrosios eilės kreivės styga.*



4 pav.

Atskiru atveju tie taškai gali sutapti. Tada tiesė vadinama antrosios eilės kreivės liestine tame taške. 4 paveiksle tiesė b yra *antrosios eilės kreivės liestinė* taške P.

Aišku, antrosios eilės kreivė ir tiesė gali ir neturėti bendrų taškų (4 paveiksle tiesė c).

Kad šie teiginiai teisingi, bent iš dalies įsitikinsime kitame skyrelyje.

4. KAI KURIOS ANTROSIOS EILĖS KREIVIŲ SAVYBĖS

Ieškokime elipsės ir tiesės bendrų taškų, t.y. spręskime iš jų lygčių sudarytą lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = mx + n. \end{cases}$$

Iš antros lygties y įrašę į pirmą lygtį ir pertvarkę, gauname kvadratinę lygtį

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0.$$

Jei D – šios lygties diskriminantas, tai

$$\frac{D}{4} = a^2b^2(b^2 + (a^2m^2 - n^2)).$$

Lygties sprendinių skaičius (du, vienas (du sutapę), nė vieno) priklauso nuo D ženklo, todėl ir elipsės (antrosios eilės kreivės) bei tiesės bendrų taškų gali būti du, vienas (du sutapę), nė vieno.

Tarkime, kad gauta kvadratinė lygtis turi du skirtingus sprendinius x_1 ir x_2. Tada tiesė elipsėje iškerta stygą M_1M_2, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, y_1 ir y_2 gaunami iš sistemos antros lygties, vietoj x įrašius x_1 ir x_2.

Pritaikę Vieto teoremą, randame stygos M_1M_2 vidurio taško $M(x; y)$ abscisę:

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{a^2m}{a^2m^2 + b^2}n.$$

Jo ordinatė

$$y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = m \cdot \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + n = \frac{b^2}{a^2m^2 + b^2}n.$$

Iš to gauname: $y = -\frac{b^2}{a^2m}x$. Tai pirmojo laipsnio lygtis.

Sakykime, nagrinėjame elipsės ir lygiagrečiųjų tiesių susikirtimo taškus, taigi ir lygiagrečiųjų stygų vidurio taškus, t.y. m nekeičiame, keičiame tik n. Tada gauta pirmojo laipsnio lygtis nusako tiesę. Taigi

įrodėme šitokią elipsės savybę: elipsės lygiagrečiųjų stygų vidurio taškai yra vienoje tiesėje (5 pav.). (Ar tai teisinga stygoms, lygiagrečioms su ašimi Oy, kurių lygčių negalima užrašyti $y = mx + n$ pavidalu?) Ta tiesė vadinama *elipsės skersmeniu*, jos ir elipsės susikirtimo taškai (N_1 ir N_2) – *skersmens galais*.



5 pav.

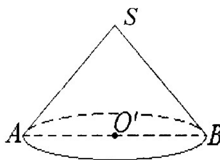
ANTROJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite (taikydami lygiagrečiojo projektavimo savybes), kad elipsės lygiagrečiųjų stygų vidurio taškai yra vienoje tiesėje.

2. Ar elipsės liestinės elipsės skersmens galuose yra lygiagrečios?

3. Nubrėžkite elipsę ir raskite jos centrą.

4. Kodėl toks paveikslas (6 pav.) yra klaidingas apskritojo kūgio ir jo ašinio pjūvio atvaizdas? Apskritąjį kūgį ir jo ašinį pjūvį pavaizduokite teisingai.



6 pav.

5. Pavaizduokite apskritimo ir į jį įbrėžto bei apie jį apibrėžto taisyklingojo trikampio lygiagrečiąją projekciją.

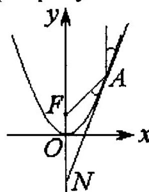
6. Pavaizduokite apskritimo ir į jį įbrėžto bei apie jį apibrėžto kvadrato lygiagrečiąją projekciją.

7. Įrodykite (nagrinėdami atitinkamą lygčių sistemą), kad parabolės lygiagrečiųjų stygų vidurio taškai yra vienoje tiesėje. Ką galite pasakyti apie tas tieses, kai vienos stygos pakeičiamos kitomis?

8. Nubrėžkite parabolę ir jos simetrijos ašį.

9. Sudarykite parabolės $y = ax^2$ liestinės taške $M(x_0; y_0)$, $y_0 = ax_0^2$, lygtį.

10. Taškas $F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ vadinamas parabolės $y = ax^2$ židiniu. Įrodykite, kad parabolės liestinė bet kuriame taške sudaro lygius kampus su spinduliu, nutiestu iš to taško į židinį, ir su parabolės simetrijos ašimi (7 paveiksle tie kampai pažymėti lankeliais).



7 pav.

Nurodymas. Išnagrinėkite trikampį AFN.

Pastaba. Ši savybė dar vadinama parabolės optine savybe: jei parabolės židinyje yra šviesos šaltinis, tai nuo parabolės atsispindėję spinduliai yra lygiagretūs su parabolės simetrijos ašimi, t.y. sudaro lygiagrečiųjų spindulių pluoštą. Ta savybe pasinaudojama gaminant prožektorius, žibintus.



3. ĮDOMIOJI LOGIKA

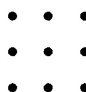
Livija Maliaukienė
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Pabandykite išspręsti šiuos uždavinukus:

1 pavyzdys. Panaudoję du degtukus, jų nelaužydami ir nepjaudami, sudarykite kvadratą.

2 pavyzdys. Kiekvieno degtuko ilgis 4,5 cm. Kaip iš 20 degtukų sudedamas metras?

3 pavyzdys. Neatitraukdami rašiklio nuo popieriaus lapo, perbraukite šiuos 9 taškus keturiomis tiesėmis.



Jei kurio nors nepasisekė išspręsti, žvilgterėkite į atsakymų puslapį. Tikriausiai supratote, kad net pokštui išsiaiškinti reikia sumanumo bei loginio mąstymo.

Žodis „logika" yra kilęs iš graikų kalbos žodžio „logos", reiškiančio „išmintis", „sąvoka", „mokymas". Logikos mokslo kūrėju laikomas senovės graikų filosofas Aristotelis (IV a. p. m. e.), o jo sukurta *formalioji logika* naudojama ir šiandien. Sunku pervertinti tą vaidmenį, kurį logika vaidina ne tik matematikoje, bet ir visur, kur reikalingas gebėjimas nuosekliai mąstyti, įrodyti teisingas ar paneigti klaidingas išvadas. Sąvoka „įrodymas" dažniausiai siejamas su matematika. Taip yra todėl, kad matematinių įrodymų teisingumas grindžiamas ne bandymų ar stebėjimų rezultatais, o nuoseklia loginių samprotavimų seka, pradedama *aksiomomis*, t.y. pradiniais tvirtinimais, kurie laikomi *tapatingai* teisingais. Tačiau koks visuotinis nustebimas kilo paaiškėjus, kad pačioje matematikoje bei logikoje egzistuoja, atrodo, nepriekaištingi samprotavimai, kurių išvados vis tik viena kitai prieštarauja. Tokie samprotavimai vadinami *paradoksais* (graikiškai *para* – prieš ir *doxa* – nuomonė), ir šis žodis vartojamas kaip sinonimas bet kurio tvirtinimo, kuris taip prieštarauja įprastiniam mąstymo būdui ir intuicijai, kad negali nekelti nustabos. Paradoksais taip pat vadinami logiškai teisingi teiginiai, kurių išvadų negalima priskirti nei teisingoms, nei klaidingoms.

Vienas iš seniausių žinomų, minimų net Naujajame Testamente, apaštalo Pauliaus laiške Titui, paradoksų yra Epimenido (legendinio

graikų poeto, gyvenusio VI a. pr. Kr. Kretos saloje) arba melagio paradoksas. Epimenidui priskiriamas tvirtinimas: „Visi Kretos salos gyventojai – melagiai“ (1).

Šis tvirtinimas logiškai prieštaringas, tariant, kad melagiai visuomet meluoja, o teisuoliai visuomet sako teisybę. Esant šiai prielaidai, (1) teiginys negali būti teisingas, nes tuomet ir Epimenidas būtų melagis, o jo teiginys – melas. Bet (1) negali būti ir klaidingas, nes tai reikštų, kad Kretos salos gyventojai sako tik teisybę, o tuomet ir Epimenido žodžiai – tiesa, bet iš (1) išplauktų, kad Epimenidas – melagis.

Egzistuoja daug melagio paradokso variantų:

a) užrašas ant sienos: „Nerašinėkite ant sienų!“;

b) užrašas: „Neskaitykite, kas čia parašyta!“;

c) viengungis skelbia, kad ves tik tą merginą, kuriai užteks proto netekėti už jo, ir pan.

Panašūs į paradoksą ir tokie tvirtinimai: „bet koks žinojimas abejotinas“ ar „vienintelė auksinė taisyklė yra ta, kad auksinių taisyklių nėra“ (Bernardas Šou).

Iš antikos laikų mus pasiekė dar vienas garsus paradoksas apie krokodilą, pagriebusį iš motinos rankų kūdikį.

Krokodilas. Ar aš suėsiu tavo kūdikį? Jei atsakymas bus teisingas, aš grąžinsiu jį tau sveiką ir nepaliestą.

Motina. O, vargas man! Tu suėsi mano kūdikį!

Krokodilas (sutrikęs). Jei atiduočiau tau kūdikį, tai tavo atsakymas būtų klaidingas ir aš galėčiau suėsti mažylį. Puiki idėja.

Motina. Bet jei tu suėstum mano kūdikį, tai mano atsakymas būtų teisingas, ir tu turėtum kūdikį grąžinti man.

Nelaimingas krokodilas taip susimąstė, kad netyčia paleido kūdikį. Motina jį pastvėrė, ir tiek jis juos tematė.

Krokodilas. Kaip gaila! Va, jei ji būtų pasakiusi, kad aš grąžinsiu kūdikį, aš būčiau turėjęs pietus!

Krokodilas atsidūrė prieš neišsprendžiamą dilemą: jis turi ir suėsti kūdikį, ir tuo pačiu metu grąžinti jį motinai.

Klasikiniai paradoksai turėjo didelę įtaką vystant logiką ir aibių teoriją. Ypač pažymėtini Bertrano Raselio (1872–1970) darbai. Jis 1902 m. suformulavo **barzdaskučio paradoksą.** *Barzdaskutys skuta tik tuos, kurie nesiskuta patys. Ar jis skutasi pats?*

Kaip buvo minėta, sprendžiant įvairius uždavinius tenka sudaryti (ilgesnę ar trumpesnę) subtilių samprotavimų grandinėlę. Panagrinėkime pavyzdį.

4 pavyzdys. Turistas ėjo ežero link. Priėjęs kryžkelę, pamatė du kelius, kurių vienas ėjo ežero link, o kitas – ne. Kryžkelėje sėdėjo du vaikinai. Vienas iš jų visada sakydavo tiesą, kitas visuomet meluodavo. Į bet kurį klausimą jie atsakydavo arba „taip", arba „ne". Visa tai turistui buvo žinoma, tik jis nežinojo, kuris iš jų melagis, o kuris teisuolis. Tada jis abiem pateikė tą patį klausimą. Koks tai buvo klausimas, jei turistas iš gautų atsakymų neklysdamas nustatė, kuris kelias eina ežero link?

Sprendimas. Turistas parodė į vieną kelią ir paklausė: „Ar tiesa, kad šis kelias eina ežero link ir kad dabar diena?"

I galimybė. Kelias, į kurį parodė turistas, eina ežero link. Teisuolis į klausimą, ar šis kelias eina link ežero, atsakytų „taip", o į klausimą, ar tiesa, kad dabar diena, – taip pat „taip", ir todėl į visą klausimą atsakys „taip". Melagis į pirmąją klausimo dalį atsakytų „ne", taip pat „ne" atsakytų ir į antrąją dalį, vadinasi, į visą klausimą atsakys „ne".

II galimybė. Kelias, kurį parodė turistas, neina ežero link. Teisuolis į pirmąją klausimo dalį atsakytų „ne", o į antrąją – „taip". Vadinasi, į visą klausimą atsakys „ne". Melagis į pirmąją klausimo dalį atsakytų „taip", o į antrąją – „ne", todėl atsakymas į klausimą bus „ne".

Išvada. Jei abu atsakymai – „ne", tai parodytas kelias neina ežero link. Jei vienas atsakymas – „taip", o kitas – „ne", tai parodytas kelias veda ežero link.

Žinoma, turistas galėjo ir kitaip paklausti, tačiau sudėtinė klausimo dalis negali būti „ar tu sakai tiesą?"

Sprendžiant kai kuriuos uždavinius, pravartu susidaryti duomenų lentelę, kuri padėtų pašalinti negalimas prielaidas.

5 pavyzdys. Parodoje susitiko trys draugai: skulptorius Baltaitis, smuikininkas Juodviršis ir dailininkas Rudokas. „Įdomu, kad vieno iš mūsų balti, vieno juodi ir vieno rudi plaukai, bet nė vienas iš mūsų neturime tokios spalvos plaukų, kurią rodo pavardė," – pastebėjo juodaplaukis. „Tu teisus", – pasakė Baltaitis. Kokios spalvos dailininko plaukai?

Sprendimas. a) Sudarome duomenų lentelę. Kadangi kiekvienas iš draugų negali turėti tokios spalvos plaukų kaip jo pavardė, tai išbraukiame lentelės įstrižainės langelius.

Plaukų spalva / Pavardė	balta	juoda	ruda
Baltaitis			
Juodviršis			
Rudokas			

b) Skulptorius Baltaitis negali būti juodaplaukis, nes jis atsakė juodaplaukiui. Todėl lentelėje išbraukiame langelį Bj. Pirmoje eilutėje lieka vienintelis langelis Br, taigi Baltaitis yra rudaplaukis.

	b	j	r
B			O
J			
R			

c) Kadangi rudaplaukis – Baltaitis, tai toks negali būti Juodviršis; todėl išbraukiame langelį Jr. Antroje eilutėje lieka vienintelis langelis Jb, taigi Juodviršis yra baltaplaukis.

	b	j	r
B			O
J	O		
R			

d) Rudokas negali būti baltaplaukis, nes baltaplaukis – Juodviršis, todėl išbraukiame langelį Rb. Trečioje eilutėje lieka vienintelis langelis Rj. Vadinai, dailininkas Rudokas – juodaplaukis.

	b	j	r
B			O
J	O		
R		O	

Norint išspręsti kai kuriuos uždavinius, reikia žinoti tokio tipo uždavinių sprendimo *algoritmą* (algorithmi – lotyniška IX a. mokslininko al – Chorezmi pavardės forma).

Pakalbėkime, pavyzdžiui, apie skaičių 9, turintį nemažai mįslingų savybių. Ar žinote, kad jis, be kita ko, yra nematoma kiekvienos garsenybės gimimo datos sudėtinė dalis? Pavyzdžiui, Lietuvos patriarchas Jonas Basanavičius gimė 1851 m. lapkričio 23 d. Jo gimimo datą užrašykime vienu skaičiumi: 18511123. Bet kaip perstatykime skaitmenis ir iš didesniojo atimkime mažesnįjį. Sudėję visus skirtumo skaitmenis, gausime 36, o 3 plius 6 yra 9! Pritaikę tą patį algoritmą Antano Baranausko (18350117), Jono Kubiliaus (19210727) ar bet kurios kitos įžymybės gimimo datai, irgi gautume 9. Ar devintukas paslėptas ir jūsų gimimo datoje?

Dabar pasiaiškinkime šio fenomeno priežastis. Sudėkime bet kokio skaičiaus skaitmenis, po to – gautos sumos skaitmenis ir tęskime šią operaciją, kol gautoji suma taps vienaženkliu skaičiumi. Šį skaičių vadinsime *skaitine šaknimi*. Bet kokio skaičiaus skaitinė šaknis lygi šio skaičiaus liekanai, gaunamai dalijant jį iš 9 (patikrinkite). Matematikas pasakytų, kad pradinis skaičius lygsta skaitinei šakniai moduliu 9. (2)

Matematika, kaip ir kitos mokslo sritys, nagrinėja įvairius teiginius. *Teiginių logika* analizuoja tik tokius teiginius, kurie yra arba teisingi, arba klaidingi, bet negali būti kartu teisingi ir klaidingi. Pavyzdžiui, teiginys „16 dalijasi iš 8" yra teisingas teiginys, o „$\cos x > 2$" yra klaidingas teiginys.

Teiginiai tarpusavyje gali būti jungiami loginėmis jungtimis: & (skaitoma „ir"), $\vee$ („arba"), $\supset$ („jei, tai"), $\neg$ („ne"), ~ („ekvivalentu"). Naudojant logines jungtis iš elementarių teiginių, sudaromi sudėtiniai teiginiai, kurių teisingumas gali būti nustatomas remiantis juos sudarančių teiginių bei loginių jungčių teisingumo reikšmėmis (žr. 1 lentelę, kurioje *t* reiškia teisingą teiginį, *n* – klaidingą).

Matome, kad dviejų elementarių teiginių A ir B *konjunkcija* A&B teisinga tik tuomet, kai abu teiginiai yra teisingi, *disjunkcija* $A \vee B$ teisinga visuomet, išskyrus atvejį, kai abu teiginiai yra klaidingi, *implikacija* $A \supset B$ klaidinga tik tuomet, kai iš teisingos prielaidos A išplaukia klaidinga išvada B, *ekvivalentumas* A~B teisingas, kai abu teiginiai turi tą pačią reikšmę, *neigimo* $\neg A$ reikšmės yra priešingos teiginio A reikšmėms.

1 lentelė

A	B	A&B	$A \vee B$	$A \supset B$	A~B	$\neg A$
t	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*n*
t	*n*	*n*	*t*	*n*	*n*	*n*
n	*t*	*n*	*t*	*t*	*n*	*t*
n	*n*	*n*	*n*	*t*	*t*	*t*

Jei sudėtinis teiginys teisingas su visomis jį sudarančių teiginių reikšmėmis, tai sakome, kad jis vadinamas *tapatingai teisingu* arba *tautologija*. *Tapatingai klaidingi* teiginiai vadinami *prieštaromis*. Teiginiai, kurie nėra nei tautologijos, nei prieštaros, vadinami *išpildomais*.

Pavyzdžiui, $(A \supset B) \sim (\neg(A \& \neg B))$ – tautologija, $A \& \neg A$ – prieštara, $A \supset (B \supset C)$ – išpildomas teiginys (patikrinkite).

6 pavyzdys. Pasitelkę teiginių logiką, išspręskime tokį uždavinį. Trys įmonės cechai (I, II ir III) yra susitarę dėl projektų tvirtinimo tvarkos:

1) jei II cechas nedalyvauja tvirtinant projektą, tai nedalyvauja ir I cechas;

2) jei II cechas dalyvauja tvirtinant projektą, tai kartu dalyvauja I ir III cechai.

Ar privalo, esant šioms sąlygoms, III cechas dalyvauti tvirtinant projektą, jei projektą tvirtina I cechas?

Sprendimas. Teiginį „I cechas dalyvauja projekto tvirtinime“ pažymėsime raide A, o analogiškus teiginius apie II ir III cechus – atitinkamai raidėmis B ir C. Tuomet uždavinių sąlygas galima užrašyti taip:

1) $\neg B \supset \neg A$,

2) $B \supset (A \& C)$.

Šie du sudėtiniai teiginiai turi būti tapatingai teisingi, nes laikomasi sutarties sąlygų. Mums reikia atsakyti į klausimą, ar tuomet ir $A \supset C$ bus tautologija. Sudarykime lentelę:

A	B	C	$\neg B$	$\neg A$	A&C	$\neg B \supset \neg A$	$B \supset A\&C$	$A \supset C$
t	***t***	***t***	*n*	*n*	*t*	***t***	***t***	***t***
t	*t*	*n*	*n*	*n*	*n*	*t*	*n*	*n*
t	*n*	*t*	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*	*t*
n	*t*	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*
t	*n*	*n*	*t*	*n*	*n*	*n*	*t*	*n*
n	*t*	*n*	*n*	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*
n	***n***	***t***	*t*	*t*	*n*	***t***	***t***	***t***
n	***n***	***n***	*t*	*t*	*n*	***t***	***t***	***t***

Iš lentelės matome, kad abi 1) ir 2) formulės kartu bus teisingos, tik imant išskirtas teiginių A, B, C reikšmes. Šioms reikšmėms $A \supset C$ įgyja tik reikšmę t, todėl galime daryti išvadą, kad jei 1), 2) yra teisingi teiginiai, tai ir $A \supset C$ – teisingas, t.y. esant nurodytoms sąlygoms, jei projektą tvirtina I cechas, tai turi dalyvauti ir III.

Panagrinėkime teiginį „Egzistuoja už kiekvieną nelyginį skaičių didesnis nelyginis skaičius“ (3). Pabandykime jį užrašyti teiginių logikos pagalba. Tegu

A: „a – bet koks nelyginis skaičius“,

B: „egzistuoja nelyginis skaičius b“,

C: „a mažesnis už b“,

Tuomet (3) teiginį galima užrašyti taip:

$$A \supset (B\&C). \qquad (4)$$

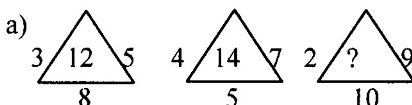
Nors (3) teiginys yra teisingas, tačiau (4) teiginys nėra tautologija. Tuo galima įsitikinti iš (4) teiginio teisingumo reikšmių lentelės (išanalizuokime savarankiškai). Kodėl taip atsitiko? Todėl, kad (3) teiginio teisingumui įrodyti nepakanka teiginių logikos, nes ji nenagrinėja teiginių struktūros. Tam reikia papildomų sąvokų, tokių kaip kvantoriai, predikatai, termai. Dažniausiai naudojami du kvantoriai: bendrumo kvantorius $\forall$ (skaitoma „visiems“, „kiekvienam“) ir egzistencijos kvantorius $\exists$ („egzistuoja“). Papildę šiomis sąvokomis bei atitinkamomis aksiomomis teiginių logiką, gauname predikatų logiką, kuri nagrinėjama aukštųjų mokyklų matematinės logikos kurse.

Norintiems plačiau susipažinti su matematine logika, rekomenduojame paskaityti šią knygelę: R. Pliuškevičius. *Susipažinkime su matematine logika*. Vilnius, 1983.

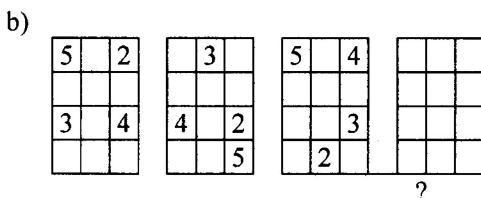
TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Nustatykite dėsningumą ir, juo remdamiesi, į klaustuku pažymėtas vietas įrašykite: a) skaičių; b) skaičius 2, 3, 4, 5 atitinkamuose langeliuose.

a)



b)



2. Kaip sustatyti prie kambario sienų:

a) 3 kėdes, kad prie kiekvienos sienos būtų po kėdę?

b) 4 kėdes, kad prie kiekvienos sienos stovėtų po dvi kėdes?

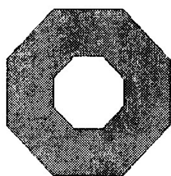
c) 7 kėdes, kad prie kiekvienos sienos jų būtų po lygiai?

3. Turtuolis surinko 11 senų prabangių automobilių kolekciją, kurią testamentu paliko trims sūnums, nurodęs pasidalyti jas taip: pusę automobilių turi gauti vyriausias sūnus, ketvirtį vidurinysis ir vieną šeštąją – jauniausias. Kaip broliams pasidalyti automobilius?

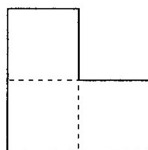
4. Sudarykite:

a) iš taisyklingo aštuonkampio su taisyklinga aštuonkampe skyle (1 pav.), padaliję jį į 8 lygias dalis – aštuonkampę žvaigždę su taisyklinga aštuonkampe skyle.

b) iš 2 paveikslėlyje pavaizduotos figūros (sudarytos iš 3 lygių kvadratų), dalydami ją į dvi dalis – kvadratą su anga, lygia vienam duotosios figūros kvadratui.



1 pav.



2 pav.

5. Teisme apklausiami trys žmonės, iš kurių kiekvienas yra arba čiabuvis, arba kolonistas. Čiabuviai visada teisingai atsako į klausimus, o kolonistai visada meluoja. Teisėjas klausia pirmojo, bet nesupranta jo atsakymo. Todėl jis teiraujasi antrojo, po to – trečiojo apie tai, ką pasakė pirmasis. Antrasis sako, kad pirmasis prisipažinęs esąs čiabuvis. Trečiasis teigia, kad pirmasis prisistatęs kolonistu. Kas buvo antrasis ir trečiasis liudytojai?

6. Paprašykite kurį nors savo draugą, jums nematant, užrašyti piniginės kupiūros numerį (ar bet kokį daugiaženklį skaičių), po to bet kaip perdėlioti skaičius ir iš didesniojo atimti mažesnįjį, paskui paprašykite išbraukti bet kurį gautojo skirtumo skaitmenį, nelygų nuliui, o likusius bet kuria tvarka pasakyti jums. Jūs lengvai atspėsite užbrauktą skaitmenį. (Jums lieka tik išsiaiškinti, kaip jūs tai padarysite.)

7. Penki draugai turi po vieną sūnų. Kiekvienas sūnus pasiskolino po knygą iš vieno savo tėvo draugų. Visų šių draugų pavardės panašios į profesijų pavadinimus, bet nė vieno iš jų pavardė neprimena jo paties profesijos. Kalvio sūnus paėmė Kalvelio knygą; jo pavardė primena Kalvelio sūnaus profesiją, taip pat jis bendrapavardis su tuo, kieno knygą paėmė Kalvelio sūnus. Žinoma, jog dailidės pavardė ne Puodžiūnas ir kad dailidė paėmė knygą iš Šikšniaus. Kokia stikliaus pavardė? (Pagal seną tradiciją sūnus paveldi savo tėvo profesiją.)

8. Vienoje saloje veikė toks įstatymas: kiekvieną, einantį tiltu į salą, teisėjai klausdavo, kur ir ko jis eina. Tuos, kurie pasakydavo tiesą, teisėjai praleisdavo, o tuos, kurie sumeluodavo, siųsdavo į kartuves.

Kartą vienas keliauninkas prisiekė, jog eina tam, kad jį pakartų. Teisėjai sutriko. Kodėl?

9. Nustatykite, ar teiginys

$$[(A \& B) \supset C] \sim [\neg(A \supset B) \& (C \vee \neg B)]$$

yra tautologija, ar prieštara, ar išpildomas.

10. Geležinkelio stotyje nustatyta tokia tvarka: jeigu iš stoties išvažiuoja traukiniai A ir B, tai turi išvykti ir traukinys C. Jei išvyksta traukiniai B ir C, tai išvyksta ir traukinys A. Nustatykite, ar esant šiai tvarkai, galimas atvejis, kai, išvykstant traukiniams A ir C, traukinys B neišvyksta? Spręsdami uždavinį, pasinaudokite teiginių logika.



4. ATVIRKŠTINĖS FUNKCIJOS

Algimantas Pranas Urbonas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Tegul funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritis X, o reikšmių aibė Y ir skirtingas argumento reikšmes atitinka skirtingos funkcijos reikšmės. Tada aibėje Y galime apibrėžti funkciją $x = f^{-1}(y)$, kiekvienam $y \in Y$ priskirdami tą skaičių $x \in X$, su kuriuo $f(x) = y$. Funkcija $x = f^{-1}(y)$ vadinama *atvirkštine funkcijai* $y = f(x)$.

Argumentą žymint raide x, o funkciją – raide y, atvirkštinė funkcija užrašoma $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$ (jos apibrėžimo sritis yra aibė Y, o reikšmių aibė X).

Viena kitai atvirkštinės funkcijos tenkina tokias lygybes:

1) $f^{-1}(f(x)) = x$, su visais $x \in X$;

2) $f(f^{-1}(x)) = x$, su visais $x \in Y$.

Pateiksime viena kitai atvirkštinių funkcijų pavyzdžių.

1 pavyzdys. Funkcijos $f(x) = 2x + 1$, apibrėžtos intervale $[-1; 3]$ (jos reikšmių aibė $[-1; 7]$), atvirkštinė funkcija yra $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$, apibrėžta intervale $[-1; 7]$ (reikšmių aibė $[-1; 3]$).

Šios funkcijos tenkina minėtąsias lygybes:

1) $f^{-1}(f(x)) = \dfrac{(2x+1)-1}{2} = x$, kai $x \in [-1; 3]$;

2) $f(f^{-1}(x)) = 2\left(\dfrac{x-1}{2}\right) + 1 = x$, kai $x \in [-1; 7]$.

2 pavyzdys. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ kai } x - \text{racionalusis } [0; 1] \text{ taškas}, \\ 1 - x, \text{ kai } x - \text{iracionalusis } [0; 1] \text{ taškas}, \end{cases}$$

apibrėžta intervale $[0; 1]$, yra pati sau atvirkštinė, nes

$$f(f(x)) = x, \text{ kai } x \in [0; 1].$$

3 pavyzdys. Raskime funkcijos $y = f(x)$, $f(x) = (x-3)^2$, $x \in [3; +\infty)$ atvirkštinę funkciją (jei ji egzistuoja).

Įsitikinkime, kad su skirtingais x_1 ir x_2 iš intervalo $[3; +\infty)$ galioja nelygybė $f(x_1) \neq f(x_2)$. Tarę, kad $(x_1-3)^2 = (x_2-3)^2$, kai $x_1 \neq x_2$, gautume: $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 6) = 0$. Iš čia išplauktų, kad $x_1 + x_2 = 6$, o tai negalima, kai x_1 ir x_2 nelygūs ir imami iš intervalo $[3; +\infty)$.

Šios funkcijos reikšmių aibė yra $[0; +\infty)$. Pasirinkime bet kurią reikšmę $y \in [0; +\infty)$ ir ieškokime x reikšmių, su kuriomis $(x-3)^2 = y$. Gauname dvi reikšmes $x = 3 - \sqrt{y}$ ir $x = 3 + \sqrt{y}$. Bet tik antroji priklauso intervalui $[3; +\infty)$. Taigi funkcija $y = 3 + \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$, yra atvirkštinė funkcijai $y = (x-3)^2$, $x \in [3; +\infty)$.

Atvirkštinių funkcijų $y = f(x)$ ir $y = f^{-1}(x)$ grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu. Iš tikrųjų, jei taškas $(x_0; y_0)$ priklauso funkcijos $y = f(x)$ grafikui, tai jam simetriškas tiesės $y = x$ atžvilgiu taškas $(y_0; x_0)$, priklauso funkcijos $y = f^{-1}(x)$ grafikui.

Kadangi ne visos funkcijos turi atvirkštines funkcijas, tai paranku žinoti požymius, kada funkcija turi atvirkštinę ir kada jos neturi.

1 požymis. Jei funkcija yra griežtai monotoninė (tik didėjanti arba tik mažėjanti), tai ji turi atvirkštinę.

Šis požymis akivaizdus, nes griežtai monotoninių funkcijų atveju skirtingas argumento reikšmes atitinka skirtingos funkcijos reikšmės.

2 požymis. Periodinės funkcijos atvirkštinių neturi.

Periodinės funkcijos taškuose x ir $x + T$ (T– funkcijos periodas) įgyja lygias reikšmes ir todėl atvirkštinių turėti negali.

Taigi funkcijos $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$, nagrinėjamos jų apibrėžimo srityse, atvirkštinių neturi. Trigonometrinių funkcijų atvirkštinės funkcijos apibrėžiamos šiuose monotoniškumo intervaluose:

a) $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

b) $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$;

c) $y = \mathrm{tg}x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

d) $y = \mathrm{ctg}x$, $x \in (0; \pi)$.

Šių funkcijų atvirkštinės yra tokios:

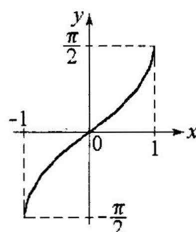
a) $y = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$;

b) $y = \arccos x$, $x \in [-1; 1]$;

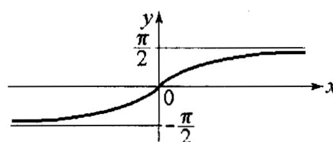
c) $y = \mathrm{arctg}x$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

d) $y = \mathrm{arcctg}x$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

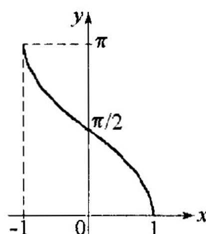
Pateikiame šių funkcijų grafikus:



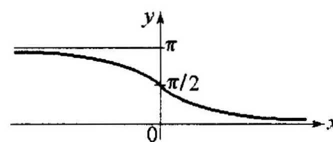
a)



c)



b)



d)

1 pav.

Pavyzdys. Raskime atvirkštinę funkciją funkcijai $y = \cos x$, $x \in [\pi; 6]$. Kadangi šiame intervale duotoji funkcija yra griežtai didėjanti, tai ji turi atvirkštinę. Funkcijos reikšmių aibė yra intervalas $[-1; \cos 6]$. Iš lygybės $y = \cos x$ išreikškime x, kai $x \in [\pi; 6]$,

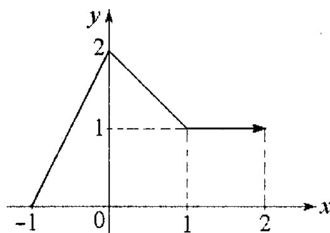
pasinaudodami tuo, kad funkcijos $u = \cos t$, $t \in [0; \pi]$, atvirkštinė yra $t = \arccos u$, $u = [-1; 1]$ (žr. 1 pav. b). Mūsų atveju $x \in [\pi; 6]$, $x - \pi \in [0; \pi]$. Perrašę lygtį $y = \cos x$ pavidalu $-y = \cos(x - \pi)$ ir pažymėję $u = -y$, $t = x - \pi$, gauname $x - \pi = \arccos(-y)$. Dabar pakeitę x ir y vietomis turime funkciją $y = \pi + \arccos(-x)$, $x \in [-1; \cos 6]$, kuri yra atvirkštinė duotajai.

Prieš užduotį pateiksime dar kelis pavyzdžius.

1 pavyzdys. Raskime funkciją, atvirkštinę funkcijai $f : X \to Y$, kai $X = \{-1; 0; 3; 5\}$, $Y = \{-2; 0; 1; 4\}$ ir $f(-1) = 0$, $f(0) = -2$, $f(3) = 4$, $f(5) = 1$.

Čia skirtingas argumento reikšmes atitinka skirtingos funkcijos reikšmės, todėl ši funkcija turi atvirkštinę: $f^{-1} : Y \to X$; $f^{-1}(-2) = 0$, $f^{-1}(0) = -1$, $f^{-1}(1) = 5$, $f^{-1}(4) = 3$.

2 pavyzdys. Funkcija $f : [-1; 2) \to [0; 2]$, kurios grafikas pavaizduotas brėžinyje, atvirkštinės neturi, nes skirtingas argumento reikšmes ne visada atitinka skirtingos funkcijos reikšmės. Pavyzdžiui, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f(1)$ ir $f(1) = 1$ arba $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$ ir $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.



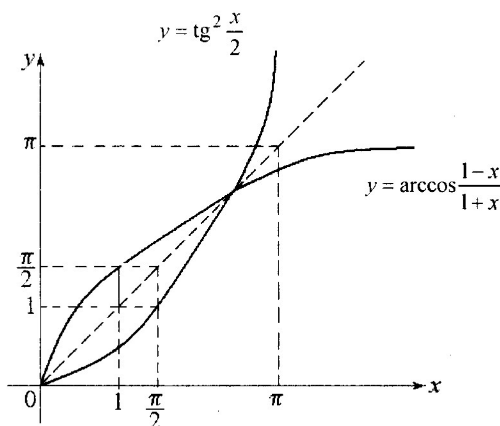
2 pav.

3 pavyzdys. Raskime atvirkštinę funkciją funkcijai $y = \arccos\frac{1-x}{1+x}$. Šios funkcijos apibrėžimo (egzistavimo) sritis yra $[0; +\infty)$. Ji gaunama iš sistemos $-1 \le \frac{1-x}{1+x} \le 1$. Funkcijos reikšmių aibė

yra $[0;\pi)$. Funkcija yra griežtai didėjanti (jos išvestinė yra teigiama visiems $x \in (0;\pi)$), todėl ji turi atvirkštinę. Raskime x iš lygybės $y = \arccos\frac{1-x}{1+x}$:

$$\cos y = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow x = \frac{1-\cos y}{1+\cos y} \Rightarrow x = \operatorname{tg}^2\frac{y}{2}.$$

Taigi funkcijos $y = \arccos\frac{1-x}{1+x}$, $x \in [0;+\infty)$, atvirkštinė funkcija yra $y = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$, $x \in [0;\pi)$. Abiejų funkcijų grafikus matome 3 pav.



3 pav.

4 pavyzdys. Raskime atvirkštinę funkciją funkcijai

$$f(x) = 3 + \sqrt{-x^2 + 4x - 4}.$$

Ši funkcija yra apibrėžta vieninteliame taške $x = 2$ ir jos reikšmė šiame taške lygi 3. Atvirkštinė funkcija $f^{-1}(x)$ taip pat apibrėžta viename taške $x = 3$ ir jos reikšmė šiame taške lygi 2.

5 pavyzdys. Raskime, su kokiomis a reikšmėmis funkcija

$$y = x^2 + ax + 1,\ x \in [-1; 5]$$

turi atvirkštinę.

Šios funkcijos grafikas yra parabolė, kurios viršūnės abscisė lygi $-\frac{a}{2}$. Kai $-\frac{a}{2}$ priklauso funkcijos apibrėžimo sričiai – funkcija atvirkštinės neturės, kitais atvejais – atvirkštinė egzistuos. Taigi reikalaujamas a reikšmes gausime iš nelygybių visumos

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{a}{2} \le -1, \\ -\frac{a}{2} \ge 5. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge 2, \\ a \le -10. \end{array}\right. \Rightarrow a \in (-\infty; -10] \cup [2; +\infty).$$

6 pavyzdys. Įrodykime atvirkštinių funkcijų tapatybę

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = -\pi - 2\operatorname{arctg} x, \ x \in (-\infty; -1).$$

Kai $x \in (-\infty; -1)$, tai

$$-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 0 \text{ ir } \underline{-\frac{\pi}{2} < \arcsin\frac{2x}{1+x^2} < 0},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < -\frac{\pi}{4} \Rightarrow -\pi < 2\operatorname{arctg} x < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < -2\operatorname{arctg} x < \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{-\frac{\pi}{2} < -\pi - 2\operatorname{arctg} x < 0}.$$

Pabrauktos nelygybės rodo, kad abiejų duotosios lygybės pusių reikšmės priklauso intervalui $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Apskaičiuokime jų tangentus ir įrodykime lygybę

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right) = \operatorname{tg}(-\pi - 2\operatorname{arctg} x);$$

$$\frac{\sin\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)}{\cos\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)} = -\operatorname{tg} 2\operatorname{arctg} x,$$

$$\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = -\frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)},$$

$$\frac{2x}{\sqrt{(x^2-1)^2}} = \frac{-2x}{1-x^2},$$

$$\frac{2x}{|x^2-1|} = \frac{2x}{x^2-1}.$$

Kadangi $x \in (-\infty; -1)$, tai

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}.$$

Taigi $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right) = \operatorname{tg}(-\pi - 2\operatorname{arctg} x)$ ir todėl

$\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = -\pi - 2\operatorname{arctg} x$, kai $x \in (-\infty; -1)$.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Patikrinkite, ar $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$, $x \in (1; +\infty)$, ir $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$, $x \in (-\infty; -1)$, yra atvirkštinės funkcijos.

2. Pateikite pavyzdį funkcijos, kuri būtų pati sau atvirkštinė.

3. Raskite funkcijos $f: X \to Y$, kai $X = \{-3; 1; 4\}$, $Y = \{-2; 0; 3\}$ ir $f(-3) = 0$, $f(1) = 3$, $f(4) = -2$ atvirkštinę funkciją.

4. Raskite funkcijos $f(x) = \sqrt{-(x-1)^2(x+3)^2} + x + 1$ atvirkštinę funkciją.

5. Raskite funkcijos $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in(-\infty;0)$, atvirkštinę funkciją $f^{-1}(x)$ ir nubraižykite funkcijų $y=f(x)$ ir $y=f^{-1}(x)$ grafikus.

6. Raskite $f^{-1}(x)$, jei $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$, $x\in(0;1)$.

7. Su kuriomis a reikšmėmis funkcija $f(x)=ax^2+4x+5$, $x\in[-2;1]$, turi atvirkštinę funkciją.

8. Įrodykite tapatybę

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}-2\,\mathrm{arctg}\,x=0,\ x\in[0;+\infty).$$

9. Įrodykite tapatybę

$$\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arctg}\frac{1-x}{1+x}=-\frac{3\pi}{4},\ x\in(-\infty;-1).$$

10. Įrodykite tapatybę

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=2\,\mathrm{arctg}\,x,\ x\in[-1;1].$$



5. OPTIMIZAVIMO UŽDAVINIAI

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Matematikos grožis yra vidinė šio mokslo harmonija. Daugelį patraukia matematikos filosofiniai aspektai, o praktiškesni žmonės ja žavisi dėl plačių taikymo galimybių. Labiau įsigilinę suvoktume, kad matematikos žinios dažniausia taikomos netiesiogiai. Iš pradžių sudaromas problemos *matematinis modelis* (tam tikras matematinis uždavinys), kuris toliau nagrinėjamas naudojantis turimomis matematikos žiniomis.

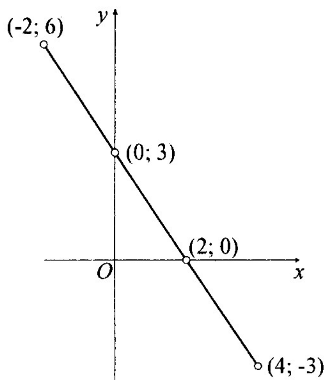
Spręsdami optimizavimo (geriausių elgesio strategijų, variantų, sprendimų paieškos) uždavinius, susipažinsime su tiesinių funkcijų, tiesinių lygčių bei nelygybių taikymo ūkinėje veikloje ir apskritai ekonomikoje kai kuriais aspektais. Žinoma, tai bus tik pati pradžia, todėl nesileisime į gilesnius samprotavimus, neformuluosime apibendrinančių teiginių, neaiškinsime sunkesnių sprendimo metodų. Išsamesnių žinių moksleiviai galėtų rasti jiems skirtoje P. Tannenbaumo ir R. Arnoldo knygoje „Kelionės į šiuolaikinę matematiką“ (Vilnius: TEV, 1995), A. Apynio ir E. Stankaus knygelėje „Elementarus matematikos taikymas ekonomikoje“ (Vilnius: Presvika, 1997) bei kituose leidiniuose.

1. Tiesinė funkcija ir tiesinė lygtis. Tiesinė vieno kintamojo x funkcija $y = f(x)$ paprastai užrašoma tiesine lygtimi $y = mx + n$ (čia m ir n – realieji skaičiai) arba tiesine lygtimi $ax + by = c$ (a, b, c – realieji skaičiai). Šios funkcijos grafikas (skaičių porų $(x; y)$, tenkinančių lygtį, aibė) Dekarto koordinačių sistemoje yra tiesė. Norėdami ją nubrėžti, turėtume pasirinkti bet kuriuos du lygties sprendinius, sakykime, $(x'; y')$ ir $(x''; y'')$, pažymėti plokštumoje ir per juos išvesti tiesę.

1 pavyzdys. Tarkime, kad tiesinės funkcijos lygtis yra $3x + 2y = 6$. Brėždami jos grafiką (žr. 1 pav.), pasirinkime sprendinius (2; 0) ir (0; 3). Lengva suvokti, kad pasirinkę kitą sprendinių porą, pavyzdžiui, $(4; -3)$ ir $(-2; 6)$, gautume tą pačią tiesę.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad tiesinės lygties $ax + by = c$ sprendiniai yra tiesėje, lygiagrečioje su ordinačių ašimi Oy, kai koeficientas b lygus nuliui. Ši tiesė lygiagreti su abscisių ašimi Ox,

kai $a = 0$. Kai laisvasis narys c lygus nuliui, tai tiesė eina per koordinačių pradžios tašką.



1 pav.

2 pavyzdys. Pavaizduokime grafiškai tiesinių lygčių

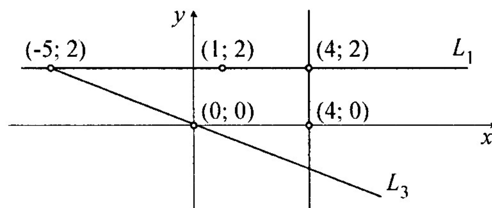
1) $0 \cdot x + 3 \cdot y = 6$,

2) $2 \cdot x + 0 \cdot y = 8$,

3) $2 \cdot x + 5 \cdot y = 0$

sprendinių aibes.

Sprendimas. Ieškomąsias tieses pažymėkime atitinkamai L_1, L_2 ir L_3. Joms nubrėžti pasirinkime po du kiekvienos lygties sprendinius. Tiesę L_1 brėžiame per taškus $(4; 2)$ ir $(1; 2)$, tiesę L_2 – per taškus $(4; 2)$ ir $(4; 0)$, o tiesę L_3 – per taškus $(0; 0)$ ir $(-5; 2)$ (žr. 2 pav.). Tiesė L_1 yra lygiagreti su ašimi Ox, tiesė L_2 lygiagreti su ašimi Oy, o L_3 eina per koordinačių sistemos pradžios tašką.



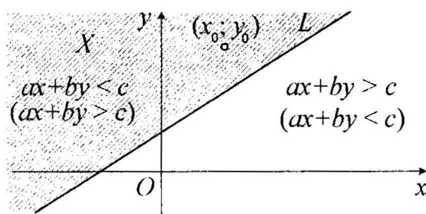
2 pav.

Pastaba. Tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais narys su lygiu nuliui koeficientu paprastai praleidžiamas (nerašomas). Taigi lygtis $0 \cdot x + 3 \cdot y = 6$ užrašoma tiesiog $3y = 6$ arba $y = 2$, o lygtis $2 \cdot x + 0 \cdot y = 8$ keičiama lygtimi $2x = 8$, arba $x = 4$.

2. Tiesinės nelygybės su dviem nežinomaisiais ir jų sistemos. Nelygybė su dviem nežinomaisiais, tarkime, x ir y, vadinama *tiesine nelygybe*, jeigu ją galima užrašyti kuriuo nors iš šių būdų: $ax + by \le c$, $ax + by < c$, $ax + by \ge c$, $ax + by > c$. Bet kurios tiesinės nelygybės su dviem nežinomaisiais sprendinių aibės geometrinis vaizdas (grafikas) stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje yra pusplokštumė. Jos kraštas – tiesė L, kurios lygtis yra $ax + by = c$. Turėtume atkreipti dėmesį į tai, kad pusplokštumės kraštas – tiesė L – priklauso tiesinės nelygybės $ax + by \le c$ ($ax + by \ge c$) sprendinių aibės grafikui. Griežtos tiesinės nelygybės $ax + by < c$ ($ax + by > c$) sprendinių aibės grafikui tiesė L nepriklauso.

Apibendrindami suformuluosime tokią tiesinės nelygybės $ax + by \le c$ ($ax + by \ge c$) sprendinių aibės (pažymėkime ją X) grafinio vaizdavimo schemą. Iš pradžių brėžiame tiesę L, kurios lygtis $ax + by = c$. Paskui pasirenkame bet kurį tašką, tarkime, $(x_0; y_0)$ šalia tiesės L (žr. 3 pav.). Jei $ax_0 + by_0 < c$, tai aibė X yra pusplokštumė (su kraštu – tiese L), kurioje yra taškas $(x_0; y_0)$. Jei $ax_0 + by_0 > c$, tai renkamės priešingąją pusplokštumę.

Kai nelygybė yra griežta ($ax + by < c$ arba $ax + by > c$), jos sprendinių aibės grafinio vaizdavimo schema tokia pati. Tik šiuo atveju prie grafiko neprijungiame pusplokštumės krašto (tiesės L).

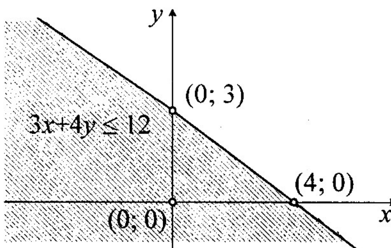


3 pav.

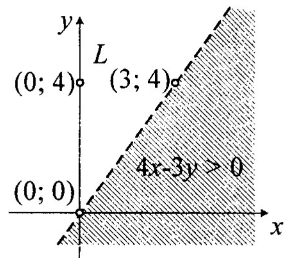
3 pavyzdys. Pavaizduokime grafiškai tiesinių nelygybių $3x+4y \le 12$ ir $4x-3y > 0$ sprendinių aibes.

Sprendimas. Tiesinės nelygybės $3x+4y \le 12$ sprendinių aibė yra pusplokštumė, kurios kraštas yra tiesė, einanti per taškus $(4; 0)$ ir $(0; 3)$. Pusplokštumei nustatyti (testuoti) tinka koordinačių pradžios taškas $(0; 0)$. Jo koordinatės tenkina nelygybę $3x+4y < 12$, todėl darome išvadą, jog tiesinės nelygybės $3x+4y \le 12$ sprendinių aibės grafikas yra pusplokštumė, kurioje yra koordinačių sistemos pradžios taškas (4 pav. ši pusplokštumė subrūkšniuota).

Kitos tiesinės nelygybės ($4x-3y > 0$) sprendinių aibę grafiškai vaizduojame panašiai (žr. 5 pav.). Iš pradžių brėžiame tiesę *L*, kurios lygtis $4x-3y=0$. Ji eina per taškus $(0; 0)$ ir $(3; 4)$. Pusplokštumei testuoti koordinačių pradžia netinka, todėl renkamės kitą tašką – $(0; 4)$, nesantį tiesėje *L*. Kadangi $4 \cdot 0 - 3 \cdot 4 < 0$, tai darome išvadą, jog tiesinės nelygybės $4x-3y > 0$ sprendiniai užpildo priešingą taško $(0; 4)$ atžvilgiu pusplokštumę (5 pav. ji subrūkšniuota). Krašto tiesė *L* grafikui nepriklauso, todėl ją nubrėšime punktyrine linija.



4 pav.



5 pav.

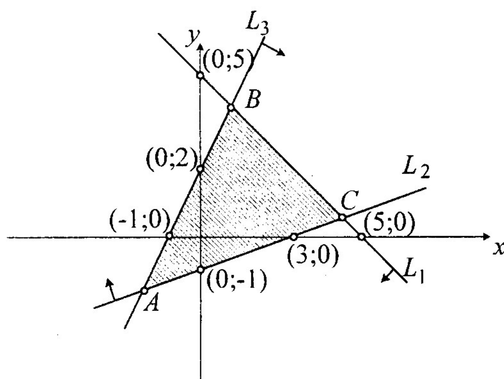
Dažnai tenka ieškoti bendrų kelioms (dviems ir daugiau) tiesinėms lygtims arba nelygybėms sprendinių. Tada sakoma, jog reikia išspręsti tiesinių lygčių arba nelygybių sistemą. Optimizavimo uždaviniams spręsti labai praverčia tiesinių nelygybių su dviem nežinomaisiais sprendinių aibės grafikas.

4 pavyzdys. Pavaizduokime grafiškai tiesinių nelygybių sistemos

$$\begin{cases} x+y \le 5, \\ x-3y \le 3, \\ 2x-y \ge -2 \end{cases}$$

sprendinių aibę X.

Sprendimas. Visų trijų tiesinių nelygybių sprendinių aibes grafiškai vaizduojame toje pačioje Dekarto koordinačių sistemoje (6 pav.). Gautąsias pusplokštumes pažymime statmenomis rodyklėmis prie atitinkamų tiesių (L_1, L_2 ir L_3), o bendrąją dalį subrūkšniuojame. Taigi aibės X grafikas yra trikampiu ABC apribota plokštumos sritis (su pačiu kontūru).



6 pav.

3. Optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai ir grafinis jų sprendimas.

Ekonominės veiklos dalyvių interesai visada susiję su konkrečiais tikslais bei ribotomis jų įgyvendinimo galimybėmis. Formuluojant problemas matematiškai vartojamos sąvokos „tikslo funkcija“, „leistinoji aibė“, „optimalusis planas“ ir kt. Pabandykime susipažinti su jomis nagrinėdami konkrečias situacijas.

5 pavyzdys. Firma siuva vyriškas ir moteriškas striukes, gaudama po 9 Lt pelno už kiekvieną vyrišką striukę ir po 12 Lt pelno už kiekvieną moterišką striukę. Išlaidos vienai vyriškai striukei pasiūti lygios 100 Lt, o vienai moteriškai striukei 40 Lt. Vyriškos striukės reklamai firma

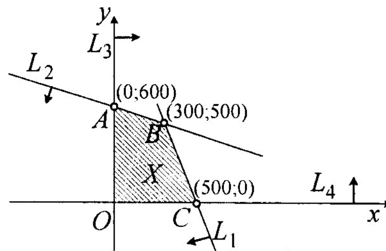
išleidžia vieną litą, o moteriškos – tris litus. Sudarykime didžiausią pelną duosiantį striukių siuvimo planą su sąlyga, kad firmos išlaidos siuvimui neturi viršyti 50 000 Lt, o reklamai – nedidesnės už 1800 Lt.

Sprendimas. Pirmiausia problemą užrašykime matematiškai. Tegu x yra planuojamų siūti vyriškų striukių skaičius, o y – moteriškų striukių skaičius. Skaičių porą $(x; y)$ pavadinkime striukių siuvimo *planu*. Laukiamą pelną pažymėkime z. Pagal sąlygą

$$z = 9x + 12y. \quad (1)$$

Tai dviejų kintamųjų tiesinė funkcija. Šiame uždavinyje ji yra *pelno funkcija* ir paprastai vadinama tiesiog *tikslo funkcija*.

Siekiant kuo didesnio pelno derėtų didinti abi plano $(x; y)$ komponentes. Tačiau išlaidos siuvimui neturi viršyti 50000 Lt, o reklamai – 1800 Lt. Taigi galimybės planuoti yra ribotos. Abu šiuos apribojimus galima užrašyti dviem tiesinėmis nelygybėmis: $100x + 40y \leq 50000$ (ji ekvivalenti tiesinei nelygybei $5x + 2y \leq 2500$) ir $x + 3y \leq 1800$. Plano komponentės negali būti neigiamos, todėl turime dar dvi sąlygas: $x \geq 0$ ir $y \geq 0$. Kol kas nekreipkime dėmesio į tai, kad pagal uždavinio prasmę abi plano komponentės turi būti sveikieji skaičiai, nes ši sąlyga būdinga ne visiems gamybos planavimo uždaviniams, – ją prisiminsime vėliau.



7 pav.

Iš visų keturių tiesinių nelygybių sudarome tiesinių nelygybių sistemą

$$\begin{cases} 5x + 2y \le 2500, \\ x + 3y \le 1800, \\ x \quad\quad \ge 0, \\ \quad\quad y \ge 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Toliau šią sistemą vadinsime *apribojimų sistema*, o jos sprendinių aibę X – *leistinąja planų aibe*.

Leistinąją aibę pavaizduokime grafiškai (žr. 7 pav.). Aišku, kad ši aibė netuščia ir joje yra sveikaskaičių taškų (t.y. tokių, kurių abi komponentės yra sveikieji skaičiai).

Jau aiškėja ir matematinė problema. Aibėje X reikia rasti sveikaskaitį tašką $(\bar{x};\ \bar{y})$, kurio koordinatės tenkina sąlygą

$$9\bar{x} + 12\bar{y} = \max(9x + 12y).$$

Glaustai uždavinys užrašomas taip:

$$\max(9x + 12y),\ \text{kai} \begin{cases} 5x + 2y \le 2500, \\ x + 3y \le 1800, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Ieškomasis leistinosios aibės X taškas $(\bar{x};\ \bar{y})$ vadinamas (3) uždavinio sprendiniu, arba *optimaliu planu*.

Taigi sudarėme nagrinėjamojo striukių siuvimo optimalaus planavimo sudarymo uždavinio matematinį modelį ir susipažinome su jo sprendinio sąvoka.

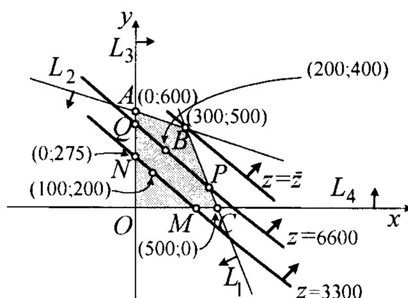
Glaustai aptarkime (3) uždavinio grafinį sprendimo metodą.

Leistinojoje aibėje X pasirinkime kurį nors tašką, pavyzdžiui, $(100; 200)$. Tikslo funkcijos reikšmė jame lygi $9 \cdot 100 + 12 \cdot 200 = 3300$. Sudarykime tiesinę lygtį

$$9x + 12y = 3300.$$

Tai tikslo funkcijos $z = 9x + 12y$ *lygio lygtis*, atitinkanti pelno lygmenį 3300. Šios lygties sprendinių aibės grafikas yra tiesė, einanti per taškus (100; 200) ir (0; 275) (žr. 8 pav.). Šią tiesę pavadinkime tikslo funkcijos lygio tiese arba tiesiog *lygio tiese* (8 pav. prie jos yra užrašas $z = 3300$). Lygio tiesė plokštumą dalija į dvi pusplokštumes. Rodykle prie tiesės pažymėkime tą, kuri atitinka tiesinę nelygybę $9x + 12y > 3300$. Darome išvadą, jog laužte *MNABC* apribotoje aibės X

srityje (be atkarpos *MN*) tikslo funkcijos reikšmės didesnės už 3300. Todėl leistinosios aibės X dalį MON „nupjauname“, nes joje optimalaus taško tikrai nėra.



8 pav.

Analogiškai elgiamės ir toliau. Srityje *MNABC* pasirenkame kurį nors tašką, pavyzdžiui, $(200; 400)$, apskaičiuojame tikslo funkcijos reikšmę (gauname $z = 6600$), sudarome lygio lygtį $9x + 12y = 6600$ ir brėžiame lygio tiesę $z = 6600$. Srityje *PQAB* funkcijos $z = 9x + 12y$ reikšmės didesnės negu 6600, todėl leistinosios aibės dalį *MNQPC* vėl „nupjauname“ (kartu su atkarpa PQ).

Atkreipkime dėmesį į tai, kad visos lygio tiesės yra tarpusavyje lygiagrečios, nes jų lygčių ($9x + 12y = 3300$, $9x + 12y = 6600$ ir kt.) koeficientai prie nežinomųjų yra tie patys.

Optimalioji lygio tiesė $z = \bar{z}$ (jos lygtis yra $9x + 12y = \bar{z}$, $\bar{z}$ – nežinomas skaičius) eina per tašką B. Šio taško koordinatės $(300; 500)$ yra tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} 5x + 2y = 2500, \\ x + 3y = 1800 \end{cases}$$

sprendinys, nes šiame taške susikerta tiesės L_1 ir L_2. Taškas $(300; 500)$ yra ieškomasis (3) uždavinio sprendinys – optimalusis striukių siuvimo planas. Abi jo koordinatės yra sveikieji skaičiai. Belieka apskaičiuoti didžiausiąjį pelną $\bar{z}$:

$$\bar{z} = 9 \cdot 300 + 12 \cdot 500 = 8700 \text{(Lt)}.$$

6 pavyzdys. Verslininkas turi dvi maisto produktų parduotuves, o duoną perka iš trijų kepyklų: K_1, K_2 ir K_3. Verslininko vidutinės išlaidos (Lt) vienam kilogramui duonos nusipirkti ir atsivežti į savo parduotuves (P_1 ir P_2) surašytos šioje lentelėje:

	P_1	P_2
K_1	2	1,5
K_2	2,8	2,5
K_3	2,5	2

Pirmosios parduotuvės užsakymas yra 2 tonos, o antrosios – 3 tonos duonos. Užsakymams įvykdyti iš pirmosios kepyklos nupirkta viena tona duonos, iš antrosios – 2,5 tonos, o iš trečiosios – 1,5 tonos duonos. Sudarykime pigiausią duonos gabenimo planą ir apskaičiuokime išlaidas jam įvykdyti.

Sprendimas. Pirmiausia sudarykime uždavinio matematinį modelį. Tegu x_{ij} yra nupirktos duonos kiekis (tonomis) iš kepyklos K_i, $i = 1, 2, 3$, kuris planuojamas gabenti į parduotuvę P_j, $j = 1, 2$. Šių skaičių rinkinį užrašykime lentele (matrica)

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$$

ir pavadinkime duonos *paskirstymo planu.*

Pagal uždavinio sąlygą plano komponentės (skaičiai x_{ij}) turi tenkinti šias lygybes:

$$x_{11} + x_{12} = 1,\ x_{21} + x_{22} = 2{,}5,\ x_{31} + x_{32} = 1{,}5,$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2,\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3.$$

Iš jų, pažymėję $x_{11} = x$ ir $x_{21} = y$, gauname:

$$x_{12} = 1 - x,\ x_{22} = 2{,}5 - y,\ x_{31} = 2 - x - y,\ x_{32} = x + y - 0{,}5.$$

Taigi ieškomasis duonos paskirstymo planas yra

$$\begin{pmatrix} x & 1-x \\ y & 2{,}5-y \\ 2-x-y & x+y-0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Išlaidas šiam planui įvykdyti (pažymėkime z) galima apskaičiuoti pagal formulę

$$z = 2000x + 1500(1-x) + 2800y + 2500(2{,}5-y) +$$
$$+ 2500(2-x-y) + 2000(x+y-0{,}5) = 11750 - 200y.$$

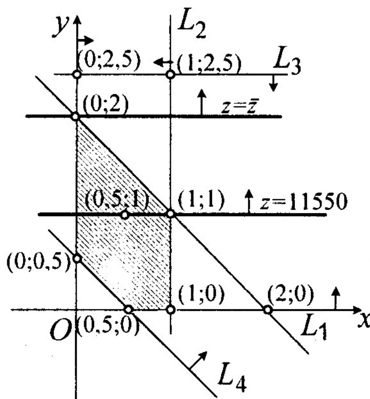
Šiame uždavinyje plano komponentės nebūtinai sveikieji skaičiai, todėl belieka atsižvelgti į jų neneigiamumo sąlygą. Turi galioti šios nelygybės:

$$x \ge 0,\ y \ge 0,\ 2-x-y \ge 0,\ 1-x \ge 0,\ 2{,}5-y \ge 0,\ x+y-0{,}5 \ge 0.$$

Jos ir apibrėžia duonos paskirstymo planų leistinąją aibę.

Uždavinio matematinis modelis toks:

$$\min(11750-200y),\ \text{kai} \begin{cases} x+y \le 2, \\ x \le 1, \\ y \le 2{,}5, \\ x+y \ge 0{,}5, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases} \qquad (5)$$



9 pav.

Šį uždavinį sprendžiame grafiniu būdu (žr. 9 pav.) ir gauname optimalųjį tašką $(0;2)$. Tikslo funkcijos reikšmė jame lygi 11350. Gautąsias x ir y reikšmes įstatome į ieškomojo plano matricą (4). Taigi optimalus nupirktos duonos paskirstymo parduotuvėms planas yra

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0{,}5 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix},$$

o jo įvykdymo kaina lygi 11350 Lt.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Plokštumoje pavaizduokite taškų $(x;y)$, tenkinančių tiesines nelygybes $2x-y\geq -4$, $x+2y\leq 0$ ir $x\leq 3$, aibę X.

2. Naudodamiesi tiesinių nelygybių sistemos

$$\begin{cases} 5x+2y\geq 10, \\ 5x+7y<35, \\ \quad\quad y>1 \end{cases}$$

sprendinių aibės X grafiku, parašykite visų šios sistemos sprendinių su abiem sveikosiomis koordinatėmis aibę.

3. Įmonė gamina dviejų rūšių detales: D_1 ir D_2. Vienai D_1 detalei pagaminti reikia išleisti 40 Lt žaliavoms ir 10 Lt darbo užmokesčiui, o vienai D_2 detalei – 30 Lt žaliavoms ir 20 Lt darbo užmokesčiui. Pardavusi detales, įmonė gauna 13 Lt pelną už kiekvieną D_1 detalę ir 17 Lt pelną už kiekvieną D_2 detalę. Žaliavoms įmonė gali išleisti iki 3200 Lt, o darbo užmokesčiui – iki 1300 Lt.

3.1. Sudarykite gamybos planų leistinąją aibę ir pavaizduokite šią aibę plokštumoje.

3.2. Parašykite pelno skaičiavimo formulę ir subrūkšniuokite tą leistinosios planų aibės dalį, kurioje pelnas ne mažesnis (lygus arba didesnis) už 663 Lt.

3.3. Raskite didžiausią pelną duosiantį detalių D_1 ir D_2 gamybos planą.

4. Verslininkas turi tris degalines (D_1, D_2, D_3) ir perka benziną iš dviejų bazių (B_1, B_2). Visų degalinių rezervuarų talpa vienoda – po 30 tonų. Vidutinės išlaidos (tūkst. litų) vienai tonai benzino pirkti ir nugabenti į degalines yra šioje lentelėje:

	D_1	D_2	D_3
B_1	0,8	0,8	1
B_2	0,75	0,9	0,8

Tarkime, kad iš pirmosios bazės nupirkta 40 tonų benzino, o iš antrosios – 50 tonų.

4.1. Sudarykite nupirkto benzino paskirstymo degalinėms pigiausio (mažiausiai kainuosiančio) plano radimo uždavinio matematinį modelį.

4.2. Raskite optimalų (pigiausią) nupirkto benzino paskirstymo degalinėms planą.

4.3. Apskaičiuokite, kiek daugiausia pinigų galima prarasti paskirstant nupirktą benziną degalinėms atsitiktinai.

5. Nustatykite, ar tiesinio optimizavimo uždavinys

$$\max(3x+4y),\ \text{kai}\ \begin{cases} 2x+y \le 4, \\ 3x-2y \le 3, \\ 5x+2y \ge 10 \end{cases}$$

turi sveikaskaitį sprendinį, t.y. optimalųjį tašką su sveikosiomis koordinatėmis. Atsakymą pagrįskite.

6. Dviejų tipų gyvenamieji namai statomi iš dviejų rūšių detalių. Pirmojo tipo name yra 12 butų, o antrojo tipo name – 16 butų. Pirmojo tipo namui pastatyti reikia 100 pirmos rūšies ir 110 antros rūšies detalių, o antrojo tipo namui – 200 pirmos rūšies ir 90 antros rūšies detalių. Kiek vieno ir kito tipo namų galima pastatyti turint 1400 pirmos rūšies ir 990 antros rūšies detalių, kad bendras butų skaičius būtų didžiausias?

6. KOMBINATORIKOS PRADMENYS

Pranas Survila
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Kombinatorika – matematinė teorija, nagrinėjanti įvairių, iš baigtinių aibių elementų sudaromų, baigtinių *rinkinių*, dar vadinamų ir *junginiais*, skaičių radimo būdus. Ji išskiria kai kuriuos junginių tipus, taip atlikdama dalinę junginių klasifikaciją, nustato junginių tipų skaičiaus radimo formules. Kėlinių, gretinių ir derinių skaičių radimo formules rasite 10 klasės matematikos vadovėliuose bei kitose kombinatorikai ir tikimybių skaičiavimui skirtose knygelėse.

Sėkmingai išspręsti užduotyje siūlomiems kombinatorikos uždaviniams šių formulių nepakaks. Reikės suvokti, kaip jungtimis „arba“ bei „ir“ yra sudaromi junginiai (rinkiniai). Jų skaičių išmoksime surasti naudodamiesi kombinatorikos *sudėties* ir *daugybos* taisyklėmis. Be to, susipažinsime su *kartotiniais junginiais*, jų skaičių radimo būdais ir formulėmis. Manau, kad kiekvienas iš Jūsų, atidžiai perskaitęs pateikiamus nurodymus ir savarankiškai išnagrinėjęs pavyzdžių sprendimus, pajėgs atlikti ir užduotį. Linkiu kantrybės ir užsispyrimo – jų dėka formuojasi mokėjimas ir įgūdžiai.

1. Kombinatorikos taisyklės ir jų taikymai

Junginiais, rinkiniais arba kombinacijomis vadinami baigtinės aibės sutvarkyti arba nesutvarkyti poaibiai, turintys vieną, du, ..., k elementų, baigtinės sekos, taip pat įvairių tipų elementų baigtiniai rinkiniai, kuriuose elementų tvarka gali būti svarbi arba nesvarbi, o patys elementai gali nesikartoti arba kartotis. Taigi reikia žinoti baigtinės aibės, jos elementų tvarkos, poaibio, sutvarkyto poaibio (baigtinės sekos) sąvokas. Taip pat reikėtų suvokti, ką reiškia „aibės turi bendrų elementų“, t.y. „aibės kertasi“ bei „aibės neturi bendrų elementų“ – „aibės nesikerta“.

Dvi baigtinės aibės A ir B neturi bendrų elementų (aibės A ir B *nesikerta*), jei aibėje A nėra elemento, kuris priklausytų aibei B (aibėje B nėra elemento, kuris priklausytų aibei A). Priešingu atveju, kai aibėje A yra elementas, kuris priklauso ir aibei B (aibėje B yra elementas, kuris priklauso ir aibei A), aibės A ir B turi bendrų elementų (aibės A ir B *kertasi*).

Pavyzdžiui, aibės

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ B = \{11, 12, 13, 14, 15\}$$

neturi bendrų elementų; aibės

$$C = \{a, b, c, d, e, f\},\ D = \{k, l, a, b, g, e\}$$

turi bendrus elementus a, b, e.

Tarkime, A_1 yra $m(A_1)$ elementų, aibėje A_2 yra $m(A_2)$ elementų ir t.t., aibėje A_k yra $m(A_k)$ elementų, ir tos aibės poromis nesikerta. Tuomet parinkti vieną elementą iš aibės A_1, arba iš aibės A_2, ... , arba iš aibės A_k, galima $m(A_1)+m(A_2)+...+m(A_k)$ skirtingais būdais.

Šis teiginys vadinamas *kombinatorine* (paprastąja) *sudėties taisykle.* Jos prasmė tokia. *Baigtinių, poromis neturinčių bendrų elementų aibių sąjungos elementų skaičius lygus tų aibių elementų skaičių sumai,* t.y. $m(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = m(A_1) + + m(A_2) + ... + m(A_k)$.

Sprendžiant kombinatorikos uždavinius ši taisyklė viena praktiškai netaikoma. Ji paprastai taikoma kartu su kita – *kombinatorine daugybos taisykle.*

Jei $B_1, B_2, ..., B_s$ yra baigtinės aibės, turinčios $m(B_1)$, $m(B_2)$, ..., $m(B_s)$ elementų atitinkamai, tai rinkinį $b_1, b_2, ..., b_s$, imant b_1 iš B_1 ir b_2 iš B_2, ..., ir b_s iš B_s galima sudaryti $m(B_1) \cdot m(B_2) \cdot ... \cdot m(B_s)$ skirtingų būdų.

Kadangi aibė, kurios elementai yra kombinacijos $(b_1, b_2, ..., b_s)$, $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$, ..., $b_s \in B_s$, vadinama aibių $B_1, B_2, ..., B_s$ Dekarto sandauga, tai kombinatorinės daugybos taisyklės prasmė tokia: *baigtinių aibių Dekarto sandaugos elementų skaičius lygus tų aibių elementų skaičių sandaugai.*

Svarbu suvokti, jog sudėties taisyklė taikoma tada, kai rinkinys (kombinacija, junginys) sudaromas naudojant jungtį *arba,* o aibės, iš kurių elementas imamas (pasirenkamas) poromis nesikerta; daugybos taisyklė taikoma tada, kai rinkinys (kombinacija, junginys) sudaromas naudojant jungtį *ir,* o aibės, iš kurių imami elementai, yra bet kokios (baigtinės).

Jei rinkiniai (junginiai, kombinacijos), kurių skaičių uždavinyje reikia rasti, nėra nė vieno iš jums žinomų tipų, tai reikia išsiaiškinti, kaip jie sudaryti jungtimis *arba* bei *ir,* tuomet pasinaudoti kombinatorinėmis *sudėties* ir *daugybos* taisyklėmis.

1 pavyzdys. Gimnazijoje yra 3 devintos klasės: 9_1 – 25 mokiniai, 9_2 – 27 mokiniai, 9_3 – 29 mokiniai. Iš vienos (bet kurios) devintosios klasės parenkami 3 mokiniai kelionei į Vokietijoje esančią lietuvišką gimnaziją. Kiek yra galimų parinkimo būdų?

Sprendimas. Trys mokiniai iš vienos (bet kurios) klasės gali būti parinkti: „iš 9_1 klasės, arba iš 9_2 klasės, arba iš 9_3 klasės“. Taigi jų skaičius yra (pagal sudėties taisyklę)

$$m = m_1 + m_2 + m_3;$$

čia m_i yra 3 mokinių parinkimų iš klasės 9_i skaičius, $i = 1, 2, 3$. Jis randamas naudojant derinių iš n elementų po 3 skaičiaus formules:

$$m_1 = C_{25}^3 = 2300,$$

$$m_2 = C_{27}^3 = 2925,$$

$$m_3 = C_{29}^3 = 3654.$$

Taigi $m = 8879$ (būdų).

2 pavyzdys. Knygyne yra tinkamo žanro 4 pavadinimų angliškos, 6 pavadinimų vokiškos ir 7 pavadinimų lenkiškos knygos. Klasės mokiniai nutarė padovanoti klasės draugui gimtadienio proga ne mažiau kaip dvi to žanro skirtingų kalbų knygas iš minėto knygyno. Kiek yra skirtingų būdų parinkti dovaną?

Sprendimas. Knygų rinkinys (dovana) tai: „angliška *ir* vokiška knygos“ *arba* „angliška *ir* lenkiška knygos“, *arba* „vokiška *ir* lenkiška *knygos*“, arba „angliška *ir* vokiška *ir* lenkiška knygos“.

Naudokime sutrumpinimus: angliška knyga – a, vokiška knyga – v, lenkiška knyga – l. Tuomet knygų rinkinį (dovaną) galima užrašyti šitaip:

$$(a, v) \text{ arba } (a, l), \text{ arba } (v, l), \text{ arba } (a, v, l).$$

Rinkinių (a, v), (a, l), (v, l), (a, v, l) aibės poromis nesikerta, todėl ieškomas rinkinių skaičius (pagal sudėties taisyklę)

$$m = m(a, v) + m(a, l) + m(v, l) + m(a, v, l).$$

Dėmenis randame naudodamiesi kombinatorine daugybos taisykle:

$m(a, v) = 4 \cdot 6 = 24$, nes angliškų yra 4 pavadinimų knygos *ir* vokiškų – 6 pavadinimų knygos;

$m(a, l) = 4 \cdot 7 = 28,$

$m(v, l) = 6 \cdot 7 = 42,$

$m(a, v, l) = 4 \cdot 6 \cdot 7 = 168.$

Taigi dovaną parinkti galima $24 + 28 + 42 + 168 = 262$ būdais.

Įsidėmėtina. Pirmoji sprendimo dalis – rinkinio išreiškimas atskirais rinkiniais, naudojant jungtis „arba“, „ir“ – svarbus sprendimo etapas. Jis turi būti fiksuojamas sakiniais (žodžiais) arba naudojant sutrumpinimus (kodus, raides).

2. Kartotiniai junginiai

Be (paprastųjų) junginių: kėlinių, gretinių, derinių, kurie faktiškai yra baigtinės aibės sutvarkymai, aibės sutvarkyti poaibiai, aibės poaibiai, kombinatorika nagrinėja ir kitokių tipų rinkinius – kartotinius junginius. Tai *kartotiniai gretiniai, kartotiniai kėliniai, kartotiniai deriniai.*

Geriausia suvokti tokius junginius, tarus, jog yra n tipų elementai, o kiekvieno tipo elementų – pakankamas skaičius. Pažymėkime i-ojo tipo elementus a_i, $i = 1, 2, ..., n$. Tada aibę $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ galėsime laikyti elementų tipų aibe.

Jei m fiksuotas skaičius ($m \in N$), tai m-narė seka $(b_1, b_2, ..., b_m)$, kurios nariai yra bent vieno iš n tipų, vadinama *kartotiniu gretiniu* iš n po m.

Kadangi kiekvienas b_i gali įgyti n skirtingų reikšmių, t.y. gali būti bet kurio tipo iš n tipų, tai kartotinių gretinių iš n po m

skaičius, žymimas $\overline{A}_n^m$, pagal daugybos taisyklę yra lygus

$$\overline{A}_n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{m} = n^m .$$

Pastaba. Dvi m-narės sekos (kartotiniai gretiniai) vadinamos lygiomis, jei lygūs jų atitinkami nariai.

3 pavyzdys. Jei $\{a, b, c\}$ yra trijų tipų elementų aibė, tai (a, a, a), (a, b, b), (c, a, a) yra skirtingi kartotiniai gretiniai iš 3 po 3, o (a, a, a, b, b), (a, c, c, c, a), (b, b, b, c, a) – skirtingi kartotiniai gretiniai iš 3 po 5.

Kartotinis gretinys $(b_1, b_2, ..., b_m)$ iš n po m, kuriame a_1 tipo elementų yra k_1, a_2 tipo elementų yra k_2 ir t. t., a_n tipo elementų yra k_n, vadinamas *tipo* $k_1, k_2, ..., k_n$ *kartotiniu kėliniu*. Akivaizdu, jog turi būti $k_1 + k_2 + ... + k_n = m$ ir $k_i \in N \cup \{0\}$, $i = 1, 2, ..., n$.

4 pavyzdys. Turėtas gretinys (a, a, a, b, b) yra tipo 3, 2, 0 kartotinis kėlinys. To paties tipo, tačiau nelygūs šiam, yra kartotiniai kėliniai

$$(a, b, a, a, b),\ (b, a, a, a, b).$$

Tipo $k_1, k_2, ..., k_n$ kartotinių kėlinių skaičius žymimas $P(k_1, k_2, ..., k_n)$ ir apskaičiuojamas pagal formulę:

$$P(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_n!}.$$

Geras kartotinio kėlinio pavyzdys yra skirtingi karoliai, sudaryti iš tų pačių karoliukų.

Kad suprastume, kokie junginiai vadinami *kartotiniais deriniais*, išspręskime tokį uždavinį.

Mama leido Jonukui nusipirkti 8 plyteles kramtomosios gumos. Parduotuvėje yra 5 rūšių kramtomosios gumos, kurių kainos vienodos. Keliais skirtingais būdais Jonukas gali nusipirkti kramtomosios gumos 8 plytelių rinkinį?

Sudarykime lentelę, kurios stulpelius pažymėkime rūšių numeriais, o eilutėje (atitinkamame stulpelyje) rašykime tiek vienetų, kiek plytelių pasirinkta. Be to, tarp šių stulpelių įterpkime stulpelius, į kuriuos rašysime nulius – žymes, atskiriančias skirtingas rūšis.

1		2		3		4		5
1111	0	1111	0		0		0	
1	0	1	0	1	0	1	0	1111
11	0	11	0	11	0	11	0	

Iš lentelės pirmos eilutės matyti, jog pirktos 4 plytelės pirmos rūšies ir 4 plyteles antros rūšies kramtomosios gumos; pirkimo kodas toks: 111101111000.

Iš antros eilutės – po 1 plytelę 1, 2, 3 ir 4 rūšies bei 4 plytelės penktos rūšies; pirkimo kodas toks: 101010101111.

Iš trečios eilutės – pirkta 1–4 rūšių po 2 plyteles; pirkimo kodas 110110110110.

Tokiu būdu kiekvienas rinkinys turės jam abipus vienareikšmiškai priskiriamą kodą – tipo 8, 4 kartotinį kėlinį, t.y. kėlinį, sudarytą iš 8 vienetų ir $4 = 5 - 1$ nulių.

Pavyzdžiui, 111010101110 – atitiks pasirinkimą: trys plytelės pirmos rūšies, viena – antros, viena – trečios ir trys – ketvirtos rūšies.

Jonuko galimų pasirinkimų (pirkinių) skaičius yra lygus tipo 8, 5–1 kartotinių kėlinių – kodų skaičiui

$$P(8, 5-1) = \frac{(8+4)!}{8!\cdot 4!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 495.$$

Jonuko kramtomosios gumos plytelių rinkinį vadiname *kartotiniu deriniu* iš 5 (rūšių arba tipų) po 8 (plyteles).

Kartotiniais deriniais iš n tipų elementų po m elementų ($n \in N$, $m \in N$) *vadinami tokie m elementų, kurių kiekvienas gali būti bet kurio iš tų n tipų, rinkiniai, besiskiriantys bent vieno tipo elementų skaičiumi.* (Elementų tvarka nesvarbi.)

Pavyzdžiui, deriniai iš 3 tipų a, b ir c po 5

$$(a, a, a, b, b),\ (a, b, b, a, a),\ (a, b, a, b, a)$$

laikomi lygiais, nes juose yra trys a tipo elementai, du b tipo elementai, c tipo elementų nėra.

Derinys (a, a, b, b, c) nesutampa nė su vienu iš užrašytų, nes jame yra du a tipo elementai, du b tipo elementai ir vienas c tipo elementas, bet jis sutampa su deriniais

$$(a, c, b, b, a),\ (c, b, b, a, a),\ (b, b, c, a, a).$$

Kartotinių derinių iš n tipų po m elementų skaičius, žymimas $\overline{C}_n^m$, apskaičiuojamas šitaip:

$$\overline{C}_n^m = \frac{(m+(n-1))!}{m!(n-1)!} = P(m, n-1).$$

Sprendžiant užduotis, kai m ir n nedideli skaičiai, patogu naudotis kodavimu, kaip parodyta pavyzdyje.

Įsidėmėtina. Kartotinio derinio iš n tipų po m elementų kodas yra m, $n-1$ tipo *kartotinis kėlinys* (m vienetų ir $n-1$ nulių). Taigi kartotinių derinių iš n tipų po m elementų skaičius yra lygus m, $n-1$ tipo kartotinių kėlinių skaičiui.

5 pavyzdys. Kiek intervale (10; 1000) yra natūraliųjų skaičių, kurių nė vienas skaitmuo nelygus nuliui?

Sprendimas. Uždavinio sąlygą tenkinantis skaičius yra rinkinys (kombinacija) „a_1a_2 arba $b_1b_2b_3$“, kuriame a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 gali būti bet kokie aibės $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ elementai.

Rinkinys (dviženklis skaičius) a_1a_2 yra kartotinis gretinys iš 9 po 2, todėl jų skaičius yra $\overline{A}_9^2 = 9^2 = 81$.

Rinkinys $b_1b_2b_3$ (triženklis skaičius) yra kartotinis gretinys iš 9 po 3, todėl jų skaičius yra $\overline{A}_9^3 = 9^3 = 729$.

Taigi intervale (10; 1000) yra $81 + 729 = 810$ skaičių su nelygiais nuliui skaitmenimis.

6 pavyzdys. Kiek skirtingų „žodžių“ (sekų) galima sudaryti perdėliojant žodžio „matematika“ raides?

Sprendimas. Kadangi žodis „matematika“ sudarytas iš 10-ies raidžių: trijų a, vienos e, vienos i, vienos k, dviejų m ir dviejų t – šešių tipų raidžių, tai jas keisdami vietomis gausime kartotinį kėlinį tipo $(3, 1, 1, 1, 2, 2)$. Tokių skirtingų kėlinių skaičius yra

$$P(3, 1, 1, 2, 2) = \frac{(3+1+1+1+2+2)!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151200.$$

7 pavyzdys. Kiek neneigiamų sveikųjų sprendinių (sprendinių, kurių komponentės sveikieji neneigiami skaičiai) turi lygtis

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 5?$$

Sprendimas. Jei neneigiamų sveikųjų skaičių rinkinys $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7)$ yra lygties sprendinys, t.y.

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7 = 5,$$

užkoduokime jį šitaip: rašome l_1 vienetų, po to nulį, po to l_2 vienetų, po to nulį ir t. t. nulį, po to l_7 vienetus. Gauname 5 vienetų ir 6 nulių seką.

Pavyzdžiui,

sprendinį $(0, 3, 0, 1, 1, 0, 0)$ atitinka kodas (01110010100),

sprendinį $(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$ – kodas (10101010100).

Gautos sekos yra $(5, 7-1)$ tipo kartotiniai kėliniai.

Mus dominančių sprendinių skaičius yra lygus tokių kodų skaičiui, t.y.

$$P(5,6)=\frac{(5+6)!}{5!\cdot 6!}=\frac{11!}{5!6!}=462.$$

Atsakymas. Lygtis turi 462 neneigiamus sveikuosius sprendinius.

3. Polinominė formulė

Kai a_1 ir a_2 bet kokie realieji skaičiai, m – natūralusis skaičius, $m \geq 2$, tai teisinga formulė

$$(a_1+a_2)^m=\sum_{k=0}^{m} C_m^k a_1^k a_2^{m-k},$$

vadinama *Niutono binomo formule**).

Ši formulė gali būti apibendrinta ir didesniam dėmenų skaičiui. Pavyzdžiui, panagrinėkime atvejį, kai $m=3$, dėmenų skaičius – taip pat 3. Tuomet teisinga formulė (vadinama *polinomine for–mule*)

$$(x+y+z)^3=\sum_{\substack{k_1\geq 0,\, k_2\geq 0,\, k_3\geq 0\\ k_1+k_2+k_3=3}} P(k_1,k_2,k_3)\, x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3};$$

čia sumuojama pagal tokius neneigiamus sveikuosius skaičius, kurių suma lygi 3.

Bendruoju atveju *polinominė formulė* tokia:

*) Užrašydami šią formulę naudojame sumavimo ženklą Σ, kuris gerokai sutrumpina matematines formules. Pavyzdžiui, sumą $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ galime rašyti taip $\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{k}$. Suma $\sum_{\substack{k_1\leq 2,\, k_2\leq 2\\ k_1\in N,\, k_2\in N}} k_1k_2$ reiškia, kad sumuojamos visos sandaugos k_1k_2, kai k_1 ir k_2 įgyja reikšmes 1 ir 2, t.y.

$$\sum_{\substack{k_1\leq 2,\, k_2\leq 2\\ k_1\in N,\, k_2\in N}} k_1k_2=1\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 1+2\cdot 2=9.$$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^m = \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \ldots, k_n \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m}} P(k_1, k_2, \ldots, k_n)\, a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n};$$

čia m ir n natūralieji skaičiai, $n \geq 2$, $m \geq 2$, o $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bet kurie realieji skaičiai.

Kai $n = 2$, ši formulė tampa Niutono binomo formule:

$$(a_1 + a_2)^m = \sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0 \\ k_1 + k_2 = m}} P(k_1, k_2)\, a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k\, a_1^k \cdot a_2^{m-k}.$$

Iš tikrųjų, jei $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ ir $k_1 + k_2 = m$, tai $k_2 = m - k_1$. Pažymėję $k_1 = k$, gauname

$$P(k_1, k_2) = P(k, m-k) = \frac{(k + (m-k))!}{k! \cdot (m-k)!} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = C_m^k.$$

8 pavyzdys. Užrašykime reiškinį

$$(x + y + z)^3 = \sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, k_3 \geq 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 3}} P(k_1, k_2, k_3)\, x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$$

nenaudodami sumavimo ženklo.

Sprendimas. Randame visas galimas k_1, k_2, k_3 neneigiamas sveikąsias reikšmes, su kuriomis $k_1 + k_2 + k_3 = 3$. Akivaizdu, kad $0 \leq k_i \leq 3$, $i = 1, 2, 3$. Kadangi $3 + 0 + 0 = 3$, tai perstatinėdami vietomis dėmenis gausime kombinacijas $(3, 0, 0)$; $(0, 3, 0)$; $(0, 0, 3)$. Kadangi $2 + 1 + 0 = 3$, tai perstatinėdami dėmenis vietomis gausime kombinacijas

$(2, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(1, 0, 2)$, $(0, 1, 2)$ ir $(0, 2, 1)$.

Suma $1 + 1 + 1 = 3$ duoda vieną kombinaciją $(1, 1, 1)$.

k_1	3	0	0	2	2	1	1	0	0	1
k_2	0	3	0	1	0	2	0	1	2	1
k_3	0	0	3	0	1	0	2	2	1	1

Pastebėję, jog $P(3, 0, 0) = P(0, 3, 0) = P(0, 0, 3) = 1$, apskaičiavę

$$P(2,1,0)=P(2,0,1)=P(1,2,0)=P(1,0,2)=P(0,1,2)=$$

$$=P(0,2,1)=\frac{(0+2+1)!}{0!\cdot 2!\cdot 1!}=3$$

bei $P(1,1,1)=\dfrac{(1+1+1)!}{1!\cdot 1!\cdot 1!}=6$, gauname (sugrupavę)

$$(x+y+z)^3=$$

$$=x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2)+6xyz.$$

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Septynis vienodai atrodančius bananus ir 5 skirtingo dydžio apelsinus reikia sudėti į du maišelius taip, kad kiekviename maišelyje būtų po lygiai vaisių ir ne mažiau kaip po 2 apelsinus. Kiek yra skirtingų supakavimo būdų, kai:
a) maišeliai vienodi;
b) maišeliai skiriasi?

2. Kiek yra intervale (100; 100000) natūraliųjų skaičių, kurie nepakinta skaitmenis užrašius atvirkščia tvarka? (Pvz., 21512, arba 3223 ir pan.)

3. Respublikai atstovaujanti krepšinio rinktinė sudaroma iš dviejų rinktinių žaidėjų. Rinktinėje A – 11 žaidėjų, rinktinėje B – 13 žaidėjų. Respublikos rinktinei reikia parinkti 12 žaidėjų, tarp kurių iš komandos B galima paimti ne daugiau kaip 5 žaidėjus. Keliais skirtingais būdais galima suformuoti respublikos krepšinio rinktinę, jei visi abiejų rinktinių krepšininkai laikomi vienodo pajėgumo?

4. Valstybės seimas nutarė sudaryti 5 žmonių komisiją vienam korupcijos skandalui ištirti. Buvo nutarta sudaryti komisiją atsitiktinai parinkus vieną iš trijų frakcijų ir iš jos atsitiktinai parenkant 5 komisijos narius: pirmininką, pavaduotoją, sekretorių ir du narius. Frakcijose yra atitinkamai 8, 10 ir 11 narių. Keliais skirtingais būdais galima sudaryti komisiją?

5. Loterijoje „6 iš 60“ ką nors laimi kortelė, kurioje iš užbrauktų 6 skaičių bent 4 skaičiai sutampa su tiražo šešetuko skaičiais. Tokia kortelė vadinama laiminga. Kiek iš viso kortelės užpildymo būdų? Keliais skirtingais būdais galima užpildyti kortelę, kad ji būtų laiminga? Apskaičiuokite 10^{-5} tikslumu „laimingų“ šešetukų skaičiaus ir visų galimų lošimo tiražo šešetukų skaičiaus santykį.

6. Kiek skirtingų 7-narių sekų galima sudaryti iš raidžių *a, b, c,* jei raidė *a* gali pasikartoti ne daugiau kaip 4 kartus, raidė *b* – ne daugiau kaip 2 kartus, raidė *c* – ne daugiau kaip 3 kartus.

7. Apskaičiuokite, kiek sveikųjų neneigiamų sprendinių (sprendinių su neneigiamomis sveikosiomis komponentėmis) turi nelygybė $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 5$.

8. Algis nutarė gimtadienio proga mamai padovanoti 5 nebūtinai skirtingus rankšluosčius. Pakeliui iš darbo į namus yra trys parduotuvės, iš kurių vienoje yra 3 rūšių, kitoje – 6 rūšių, trečioje – 4 rūšių rankšluosčių, Algio manymu, tinkamų dovanai. Kiek yra skirtingų dovanos komplektavimo būdų, jei Algis visus 5 rankšluosčius pirktų vienoje iš tų parduotuvių?

9. Naudodamiesi polinomine formule apskaičiuokite reiškinio $(x+y+z)^9$ koeficientus prie sandaugų $x^3y^3z^3$, $x^4y^2z^3$, $x^5y^3z^1$.

10. Naudodamiesi polinomine formule užrašykite reiškinio $(x+y+z+t)^3$ skleidinį (kėlimo laipsniu formulę be sumavimo ženklo Σ). Gautos sumos dėmenis su vienodais koeficientais sugrupuokite ir iškelkite koeficientus prieš skliaustus.



7. TIKIMYBIŲ TEORIJOS PRADMENYS

Pranas Survila
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. ĮVYKIO TIKIMYBĖS RADIMAS IŠREIŠKIANT JĮ ELEMENTARIAISIAIS ĮVYKIAIS

1.1. Kiekvienas įvykis – tai tam tikro vyksmo (veiksmo, proceso), vadinamo eksperimentu arba bandymu, pasekmė. Bandymo esminės dalys: *vyksmas* (veiksmas), *baigties registracija*. Vyksmo baigtys vadinamos elementariaisiais įvykiais. Visų galimų baigčių aibė paprastai žymima $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$; $e_1, e_2, \dots, e_n$ – elementarieji (bandymo) įvykiai, n – galimų baigčių skaičius – elementariųjų įvykių skaičius. Matematine kalba kiekvienas su eksperimentu (bandymu) susietas įvykis yra aibės E poaibis. Tarp jų $\varnothing$ – tuščia aibė – negalimas įvykis. Žodžiais jis gali būti reiškiamas įvairiai. E – būtinas įvykis; jo žodinė išraiška irgi nevienareikšmė.

Įvykio $A \subset E$ tikimybė

$$P(A) = P(e_{i_1}) + \dots + P(e_{i_k}) = \sum_{e \in A} P(e)$$

yra *tą įvykį sudarančių elementariųjų įvykių tikimybių suma*. Elementariųjų įvykių tikimybes $p_i = P(e_i)$, kurios tenkina sąlygas $0 \le p_i \le 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ ir $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ nustato eksperimentas.

Kai eksperimento baigtys yra vienodai galimos, tai $P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_n) = \frac{1}{n}$ ir įvykio A tikimybė išreiškiama paprasta formule

$$P(A) = \frac{m_A}{n}.$$

Joje m_A – *įvykį A sudarančių elementariųjų įvykių* (baigčių) *skaičius*.

Formulės paprastumas apgaulingas – ir gana paprastų eksperimentų atvejais surasti skaičius n ir m_A nelengva. Tai matyti iš pateikiamų pavyzdžių.

1 pavyzdys. Simetrinė moneta metama 6 kartus kiekvieną kartą pažymint, kaip ji atvirto. Įvykis A – „herbas atvirto 3 kartus“. Apskaičiuokime $P(A)$.

Sprendimas. Eksperimento baigtis (baigties kodas) – šešių raidžių rinkinys

$$a\,b\,c\,d\,e\,f\,,$$

iš kurių kiekviena paimta iš aibės $\{s, h\}$ (s – skaičius, h – herbas). Tokių rinkinių skaičių n randame pagal daugybos taisyklę

$$n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64.$$

Įvykis „herbas atvirs 3 kartus“, kai moneta metama 6 kartus, įvyks, jei sekoje $a\,b\,c\,d\,e\,f$ bus trys raidės h. Raidė h gali būti įrašyta į bet kurių trijų raidžių iš šešių vietas. Taigi tokių sekų yra tiek, kiek bus aibės $\{a, b, c, d, e, f\}$ poaibių (derinių) po 3 elementus, t. y. $m_A = C_6^3$. Todėl $P(A) = \dfrac{C_6^3}{2^6} = \dfrac{20}{64} = \dfrac{5}{16}$.

Ne visų eksperimentų baigtys yra vienodai galimos. Kartais baigčių tikimybes galima apskaičiuoti išreiškus tas baigtis klasikinio bandymo, t. y. modifikuoto bandymo su vienodai galimomis baigtimis, baigtimis. Kaip tai daroma, iliustruoja pavyzdys.

2 pavyzdys. Metamos 4 vienodos monetos. Registruojama, kuria puse jos atvirto. Apskaičiuokime įvykio A – „herbu atvirto ne mažiau monetų negu skaičiumi“, tikimybę

Baigties kodas – dviejų skaičių poros $(k, 4-k)$ $k = 0, 1, 2, 3, 4$; čia k – monetų atvirtusių herbu, skaičius, $4-k$ – monetų, atvirtusių skaičiumi, skaičius. Tuomet

$$E = \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}.$$

Norėdami rasti baigčių tikimybes, mintyse sunumeruokime monetas. Šitaip monetas „paverčiame“ skirtingomis, ir eksperimentas (modifikuotas) tampa klasikiniu – su vienodai galimomis baigtimis. Jo baigčių kodai yra raidžių ketvertai $(a\,b\,c\,d)$, kurių kiekviena gali įgyti reikšmes s, h. To eksperimento (mintinio) baigčių aibė yra

$$E' = \{(a\,b\,c\,d) / a, b, c, d \in \{s, h\}\};$$

šitoks aibės žymėjimas, reiškia rinkinių $(a\,b\,c\,d)$ aibę, kai kiekvienas rinkinio elementas gali būti bet kuris aibės $\{s, h\}$ elementas. Jos baigčių

skaičius $n_1 = 2^4 = 16$.

Turėsime:

$$(0, 4) = (s, s, s, s), \quad P(0, 4) = \frac{1}{16};$$

$$(1, 3) = \{(h\ s\ s\ s), (s\ h\ s\ s), (s\ s\ h\ s), (s\ s\ s\ h)\}, \quad P(1, 3) = \frac{4}{16};$$

$$(2, 2) = \{(s\ s\ h\ h), (s\ h\ s\ h), (h\ s\ s\ h), (h\ s\ h\ s), (h\ h\ s\ s), (s\ h\ h\ s)\},$$

$$P(2, 4) = \frac{6}{16};$$

$$(3, 1) = \{(h\ h\ h\ s), (h\ h\ s\ h), (h\ s\ h\ h), \ (s\ h\ h\ h)\}, \quad P(3, 1) = \frac{4}{16};$$

$$(4, 0) = \{(h\ h\ h\ h)\},. P(4, 0) = \frac{4}{16}.$$

Kadangi $A = \{(2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$, tai

$$P(A) = P(2, 2) + P(3, 1) + P(4, 0) = \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}.$$

Kai modifikuoto (mintinio) eksperimento baigčių skaičius didelis, užrašyti eksperimento baigčių išraiškas modifikuoto eksperimento baigtimis nėra įmanoma. Tenka naudotis klasikine tikimybės formule, o mintinio eksperimento baigčių skaičių ir eksperimento baigčiai palankių mintinio eksperimento baigčių skaičių surasti pasitelkiant kombinatoriką.

Kombinatorika tenka naudotis ir tais atvejais, kai eksperimento baigtys vienodai galimos, tačiau jų skaičius didelis. Tai iliustruoja toks pavyzdys.

3 pavyzdys. Eksperimentas – loto „5 iš 40“ tiražas. Įvykis A – „įsigytos kortelės 3 užbraukti skaičiai sutapo su tiražo penketuko skaičiais“. Apskaičiuokime tikimybę $P(A)$.

Sprendimas. Tarkime, kad tiražas vykdomas be apgaulės – kiekvienas penketas skaičių iš 40 skaičių yra vienodai galimi. Penketų skaičius – derinių iš 40 po 5 elementus skaičius yra

$$n = C_{40}^5 = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 658008.$$

Įvykis A – „3 užbraukti skaičiai sutapo su tiražo penketuko skaičiais“ – „3 skaičiai parinkti iš tiražo penkių skaičių ir du skaičiai

parinkti iš į tiražą nepatekusių 35 skaičių". Pagal daugybos taisyklę

$$m_A = C_5^3 \cdot C_{35}^2 = 10 \cdot \frac{35 \cdot 34}{2} = 5950.$$

Taigi

$$P(A) = \frac{5950}{658008} \approx 0{,}009.$$

Pastaba-klausimas. Ar verta pirkti tokios loterijos bilietą, jei tikimybė laimėti (mažiausią prizą) tokia maža?

2. ĮVYKIŲ ALGEBRA IR JOS TAIKYMAS SKAIČIUOJANT ĮVYKIŲ TIKIMYBES

Tikimybių teorijoje išvedamos įvairios formulės, pagal kurias galima apskaičiuoti sudėtinių įvykių tikimybes. Įvykiai, išreiškiami kitais, panaudojant įvykių (aibių) veiksmus, vadinami *sudėtiniais*. Jums teks naudotis formulėmis:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k),$$

čia $A_i \cap A_j = \varnothing$, kai $i \neq j$; įvykiai $A_1, A_2, \ldots, A_k$ vadinami poromis nesutaikomais.

Jei $P(A) \neq 0$ ir $P(B) \neq 0$, tai

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$ – *įvykių sankirtos tikimybės formulės.* Joje $P(B/A)$ – įvykio B sąlyginė tikimybė, kai A įvyko, $P(A/B)$ – įvykio A sąlyginė tikimybė, kai B įvyko. Iš jų gauname formules

$$P(B/A) = \frac{P(B)\,P(A/B)}{P(A)}, \quad P(A/B) = \frac{P(A)\,P(B/A)}{P(B)},$$

vadinamas *Bajeso formulėmis* arba *hipotezių tikrinimo formulėmis.*

Trijų įvykių A, B, C, kai $A \neq \varnothing$ ir $A \cap B \neq \varnothing$, sankirtos tikimybę galima apskaičiuoti pagal formulę

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B).$$

Jei $E = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k$ ir $H_i \cap H_j = \varnothing$, kai $i \neq j$, tai

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_k)P(A/H_k).$$

Pastaroji formulė vadinama *pilnosios tikimybės formule.*

4 pavyzdys (pailiustruojantis įvykių sankirtos tikimybės formulės taikymą). Dėžutėje yra 3 raudoni, 3 balti ir 2 juodi pieštukai. Iš jos vienas po kito išimama po vieną pieštuką. Raskite įvykio A – „juodas pieštukas bus išimtas pirmiau negu baltas" tikimybę.

Sprendimas. Kad suprastume, kaip randama mus dominančio įvykio tikimybė, turime gerai suvokti, iš ko jis sudarytas. Juodasis pieštukas bus išimtas pirmiau negu baltas, kai: „pirmasis išimtas pieštukas bus juodas" *arba* „pirmasis išimtas pieštukas bus raudonas, o antrasis juodas" *arba* „pirmas išimtas pieštukas raudonas ir antrasis raudonas, o trečiasis juodas" *arba* „pirmasis raudonas, ir antrasis raudonas ir trečiasis raudonas, o ketvirtas juodas". Pasitelkę simboliką gausime šitokią įvykio išraišką:

$$A = \{j_1\} \cup \{r_1 j_2\} \cup \{r_1 r_2 j_3\} \cup \{r_1 r_2 r_3 j_4\}.$$

Čia $\{r_1 j_2\} = \{r_1\} \cap \{j_2\}$, $\{r_1 r_2 j_3\} = \{r_1\} \cap \{r_2\} \cap \{j_3\}$ ir pan.

Kadangi dėmenys yra nesutaikomi įvykiai, tai

$$P(A) = P\{j_1\} + P\{r_1 j_2\} + P\{r_1 r_2 j_3\} + P\{r_1 r_2 r_3 j_4\}.$$

Akivaizdu, $P\{j_1\} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.

Įvykio $\{r_1 j_2\}$ tikimybę apskaičiuojame naudodami įvykių sankirtos tikimybės formulę, nes $\{r_1 j_2\} = \{r_1\} \cap \{j_2\}$. Todėl

$P\{r_1 j_2\} = P\{r_1\} \cdot P\{j_2 / r_1\} = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{7} = \dfrac{3}{28}$, nes ištraukus raudoną, lieka 7 pieštukai, tarp kurių 2 juodi. Toliau

$$P\{r_1 r_2 j_3\} = P\{r_1 r_2\}\, P\{j_3 / r_1 r_2\}.$$

Kadangi $P\{j_3 / r_1 r_2\} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ (nes ištraukus 2 raudonus lieka 6 pieštukai, tarp kurių 2 juodi), o

$$P\{r_1 r_2\} = P\{r_1\} \cdot P\{r_2 / r_1\} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}, \text{ tai}$$

$$P\{r_1 r_2 j_3\} = \frac{3}{28} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{28}.$$

Analogiškai skaičiuodami, turėsime

$$P\{r_1 r_2 r_3 j_4\} = P\{r_1 r_2 r_3\}\, P\{j_4 / r_1 r_2 r_3\} =$$

$$= P\{r_1\}P\{r_2 / r_1\}\, P\{r_3 / r_1 r_2\} \cdot P\{j_4 / r_1 r_2 r_3\} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{140}.$$

Galutinai gauname

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{3}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{140} = \frac{35 + 15 + 5 + 1}{140} = \frac{56}{140} = \frac{2}{5}.$$

5 pavyzdys (pilnosios tikimybės formulės ir Bajeso formulės taikymo iliustravimas). Yra dvi vienodos dėžutės, kuriose sudėti vienodo svorio rutuliai. Vienoje iš jų yra 3 balti ir 4 juodi rutuliukai, o kitoje – 5 balti ir 5 juodi. Žmogus atsitiktinai renkasi sunkesnę dėžutę su tikimybe $\frac{3}{5}$. Jis atsitiktinai pasirinko dėžutę ir iš jos ištraukė rutulį, kuris buvo juodas – įvykis A. Apskaičiuokime sąlygines tikimybes (hipotezių tikimybes) įvykių: H_1 – „žmogus pasirinko pirmąją dėžutę“, H_2 – „žmogus pasirinko antrąją dėžutę.“

Sprendimas. „Besąlyginės“ tikimybės

$$P(H_1) = \frac{2}{5},\ P(H_2) = \frac{3}{5}.$$

Sąlyginės tikimybės

$$P(A / H_1) = \frac{4}{7},\ P(A / H_2) = \frac{1}{2}.$$

Pagal Bajeso formulę

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7}}{P(A)},$$

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A / H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{P(A)}.$$

Pagal pilnosios tikimybės formulę randame $P(A)$:

$$P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{37}{70}.$$

Todėl $P(H_1 / A) = \dfrac{\frac{8}{35}}{\frac{37}{70}} = \dfrac{16}{37},\ P(H_2 / A) = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{37}{70}} = \dfrac{21}{37}.$

3. ATSITIKTINIO DYDŽIO SKIRSTINYS, MATEMATINĖ VILTIS, DISPERSIJA

Panagrinėkime, kaip paprasčiausiais atvejais randamas atsitiktinio dydžio skirstinys, atsitiktinio dydžio matematinė viltis ir dispersija.

6 pavyzdys. Mokinys laiko lietuvių kalbos ir matematikos egzaminus. Jo galimų pažymių tikimybės yra šitokios

Pažymys		10	9	8
P	Lietuvių kalba	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
(tikimybės)	Matematika	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Pažymėkime raide X mokinio gautų pažymių sumą. Kokios pažymių sumos galimos reikšmės ir kokios šių reikšmių tikimybės?

Sprendimas. Tegu T_l ir T_m – lietuvių kalbos ir matematikos pažymiai. Turime $X = T_l + T_m$.

Taigi galimos X reikšmės yra: 16, 17, 18, 19, 20. Apskaičiuojame tikimybes (įvykių):

$$P(X = 16),\ P(X = 17),\ P(X = 18),\ P(X = 19),\ P(X = 20),$$

tarę, jog vieno egzamino pažymys nepriklauso nuo kito egzamino rezultato. Įvykis $\{X = 16\} = \{T_l = 8\}$ ir $\{T_m = 8\}$. Kadangi $\{X = 16\} = \{T_l = 8\} \cap \{T_m = 8\}$, tai

$$P(X = 16) = P(T_l = 8) \cdot P(T_m = 8) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Toliau

$$\{X = 17\} = (\{T_l = 9\} \cap \{T_m = 8\}) \cup (\{T_l = 8\} \cap \{T_m = 9\}),$$

todėl

$$P(X = 17) = P(T_l = 9) \cdot P(T_m = 8) + P(T_l = 8) \cdot P(T_l = 9) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Kadangi $\{X = 18\} = (\{T_l = 10\} \cap \{T_m = 8\}) \cup (\{T_l = 9\} \cap$ $\cap \{T_m = 9\}) \cup (\{T_l = 8\} \cap \{T_m = 10\})$, todėl

$$P(X=18)=P(T_l=10)\cdot P(T_m=8)+P(T_l=9)\cdot P(T_m=9)+$$
$$+P(T_l=8)\cdot P(T_m=10)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Analogiškai

$$\{X=19\}=(\{T_l=10\}\cap\{T_m=9\})\cup(\{T_l=9\}\cap\{T_m=10\}).$$

Tuomet

$P(X=19)=$;

$$P(X=20)=P(T_l=10)\cdot P(T_m=10)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Atsakymą galime pateikti lentele

X reikšmės	x_i	16	17	18	19	20
Tikimybės	P_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Šia lentele apibrėžta funkcija vadinama *atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstiniu.* Čia x_i – *atsitiktinio dydžio reikšmės* – skaičiai; P_i – *įvykių* $\{X=x_i\}$ *tikimybės* – neneigiami skaičiai, kurių suma lygi vienetui. Šiame uždavinyje:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=1.$$

Randame matematinę viltį:

$$\mathrm{E}X=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5=$$
$$=16\cdot\frac{1}{12}+17\cdot\frac{1}{6}+18\cdot\frac{1}{3}+19\cdot\frac{1}{4}+20\cdot\frac{1}{6}=\frac{73}{4}.$$

Apskaičiuojame dispersiją:

$$\mathrm{D}X=(X_1-\mathrm{E}X)^2p_1+(X_2-\mathrm{E}X)^2p_2+(X_3-\mathrm{E}X)^2p_3+$$
$$+(X_4-\mathrm{E}X)^2p_4+(X_5-\mathrm{E}X)^2p_5=\left(-\frac{9}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{12}+\left(-\frac{5}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+$$
$$+\left(-\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{65}{48}.$$

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Petriuko spalvotų pieštukų dėžutėje yra 5 pieštukai: žalias, raudonas, geltonas, oranžinis, mėlynas. Jonuko dėžutėje – 4 pieštukai: žalias, raudonas, geltonas, mėlynas. Kiekvienas iš berniukų atsitiktinai paima po vieną pieštuką ir deda ant stalo. Pasirinkę tinkamą kodavimą sudarykite bandymo baigčių – elementariųjų įvykių – aibę. Pažymėkime įvykius:
A – „abu berniukai ištraukė vienodų spalvų pieštukus";
B – „nė vienas berniukas neištraukė raudono pieštuko";
C – „bent vienas ištrauktas pieštukas geltonas".
Išreiškę šiuos įvykius elementariaisiais įvykiais, apskaičiuokite jų tikimybes.

2. Dėžėje 4 juodi, 2 žali ir 2 balti vienodo dydžio rutuliai. Atsitiktinai ištraukiami du rutuliai ir užrašomos jų spalvos.
1. Sudarykite elementariųjų įvykių aibę.
2. Pakeitę (modifikavę) bandymą klasikiniu, apskaičiuokite elementariųjų įvykių tikimybes.
3. Įvykius:
A – „ištraukti skirtingų spalvų rutuliai";
B – „neištrauktas juodas rutulys";
C – „bent vienas rutulys baltas",
išreiškę elementariaisiais (nemodifikuoto bandymo) įvykiais, apskaičiuokite jų tikimybes.

3. Lošimo kauliukas mėtomas tol, kol jis atvirto daliu iš 3 skaičiumi arba kol 5 kartus iš eilės atvirsta nedaliu iš trijų skaičiumi. Sudarykite elementariųjų įvykių aibę. Raskite elementariųjų įvykių tikimybes. Apskaičiuokite įvykių:
A – „prireiks mažiau negu keturių metimų",
B – „eksperimentas baigsis atvirtus daliam iš 3 skaičiui" ir
C – „prireiks mesti kauliuką nelyginį skaičių kartų",
tikimybes

4. Matuojant dydį (pavyzdžiui sveriant, matuojant ilgį, plotą ir pan.) neneigiamos paklaidos tikimybė lygi 0,6. Atliekami 5 nepriklau-

somi to dydžio matavimai. Apskaičiuokite įvykio „neneigiamų paklaidų skaičius mažesnis už neigiamų paklaidų skaičių" tikimybę.

5. Kontrolinį darbą sudaro 6 uždaviniai – 3 algebros ir 3 geometrijos. Tikimybė, kad mokinys išspręs algebros uždavinį, lygi 0,8, geometrijos uždavinį – lygi 0,6. Raskite įvykio: „mokinys išspręs tik 4 uždavinius" tikimybę. (Laiko užtenka; mokinys bando spręsti visus uždavinius; vieno ar kelių uždavinių išsprendimas ar neišsprendimas nedaro įtakos kitų uždavinių išsprendimo ar neišsprendimo tikimybei.) Atsakymą pateikite trijų ženklų po kablelio tikslumu.

6. Dėžėje 4 balti ir 5 juodi rutuliai. Du draugai (Jonas ir Simas) paeiliui traukia iš dėžės po vieną rutulį negrąžindami atgal. Laimi tas, kas pirmasis ištraukia juodą rutulį. Pirmasis pradeda Jonas. Apskaičiuokite įvykių „laimi Jonas" ir „laimi Simas" tikimybes.

7. Įvykiai A_1, A_2, A_3, A_4 tenkina sąlygas: $A_1 \neq \varnothing$, $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \varnothing$. Užrašykite ir įrodykite formulę sankirtos $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ tikimybei apskaičiuoti.

8. Draudimo kompanija skirsto vairuotojus į tris klases: H_1 – atsargūs vairuotojai, H_2 – retai rizikuojantys vairuotojai, H_3 – dažnai rizikuojantys (nutrūktgalviai) vairuotojai. Žinoma, jog klasei H_1 priklauso 50 %, klasei H_2 – 30 %, klasei H_3 – 20 % visų vairuotojų. Per metus patenka bent į vieną avariją klasės H_1 vairuotojas su tikimybe lygia 0,01, klasės H_2 vairuotojas – su tikimybe 0,03, klasės H_3 vairuotojas – su tikimybe 0,10.

Henrikas (apsidraudęs automobilį) per metus pateko į autoavariją. Apskaičiuokite tikimybes, jog jis priklauso klasei H_1, klasei H_2, klasei H_3. Atsakymus pateikite trijų ženklų po kablelio tikslumu.

9. Atsitiktinio dydžio ***X*** tikimybių skirstinys yra:

x_k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
p_k	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

Atsitiktinio dydžio Y tikimybių skirstinys toks:

y_k	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
q_k	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5

Įrodykite, kad $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$.

10. Metamas standartinis lošimo kauliukas ir lošimo kauliukas, kurio šonai pažymėti skaičiais $-3, -2, -1, 1, 2, 3$. Atsitiktinis dydis ***X*** – atvirtusių ant abiejų kauliukų skaičių suma. Raskite atsitiktinio dydžio ***X*** tikimybių skirstinį. Nubraižykite jo grafiką. Apskaičiuokite $\mathrm{E}X$ ir $\mathrm{D}X$.



8. KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI

Algirdas Nagelė
(Vilniaus universitetas)

1. KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI IR VEIKSMAI SU JAIS

Matematikoje jau seniai kilo būtinybė praplėsti realiųjų skaičių aibę, kad joje tilptų visų algebrinių lygčių šaknys. Jei su realiaisiais skaičiais atliekame sudėties, atimties, daugybos ar dalybos iš nelygaus nuliui skaičiaus veiksmus, tai gauname taip pat realiuosius skaičius. Tačiau žinome, kad kvadratinė lygtis $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ ir $a, b, c\in \mathrm{R}$, kai diskriminantas $D=b^2-4ac<0$, realiųjų skaičių aibėje sprendinių neturi.

Pavyzdžiui, paprasčiausios kvadratinės lygtys:

$$x^2+1=0,\ x^2+x+1=0,\ x^2-2x+5=0$$

realiųjų skaičių aibėje neišsprendžiamos. Spręsdami šias lygtis susiduriame su kvadratinėmis šaknimis iš neigiamųjų skaičių, būtent:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-1},\ x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3},\ x_{1,2}=1\pm\sqrt{-4}.$$

Matematinėje literatūroje jau nuo 16 a. vartojamas skaičius $\sqrt{-1}$. Vėliau prancūzų matematikas R. Dekartas (1596–1650) pasiūlė skaičių $\sqrt{-1}$ vadinti *menamuoju vienetu*, o L. Oileris (1707–1783) šį skaičių pradėjo žymėti prancūziškojo žodžio *imaginare* (menamas, įsivaizduojamas) pirmąja raide: $i=\sqrt{-1}$.

F. Gausas (1777–1855) pirmasis pasiūlė dvinarius $x+iy$, $x, y\in \mathrm{R}$, vadinti *kompleksiniais skaičiais*. Čia simbolis i vartojamas vienam realiajam skaičiui atskirti nuo kito, o ženklas + nereiškia sumavimo – juo du realieji skaičiai sujungiami į vieną reiškinį.

Kompleksinius skaičius galima apibrėžti ir kitaip. Sakykime, kad x ir y – realieji skaičiai. Tokių skaičių pora $(x; y)$ vadinama *sutvarkytąja*, jei x laikomas pirmuoju, o y – antruoju poros skaičiumi.

Sutvarkytų porų $(x; y)$ aibė, kurioje apibrėžti sudėties ir daugybos veiksmai, vadinama *kompleksinių skaičių aibe*. Šios aibės elementai – poros $(x; y)$ – vadinami *kompleksiniais skaičiais*.

Kompleksinių skaičių aibę žymėsime C, o šios aibės elementus

$$z = x + iy \text{ arba } z = (x; y),\ z \in \mathrm{C}.$$

Toliau naudosime pirmąjį kompleksinio skaičiaus žymėjimą, t.y.

$$z = x + iy,\ x, y \in \mathrm{R}. \qquad (1)$$

Ši išraiška vadinama kompleksinio skaičiaus *algebrine forma.*

Kiekvienas realusis skaičius x yra kartu ir kompleksinis skaičius $z = x + i0 = x$, todėl realiųjų skaičių aibė R yra aibės C poaibis, t.y. $\mathrm{R} \subset \mathrm{C}$. Skaičiai $z = 0 + iy = iy$ – vadinami *menamaisiais.*

Realųjį skaičių x vadinsime kompleksinio skaičiaus $z = x + iy$ *realiąja dalimi*, o skaičių y – to skaičiaus *menamąja dalimi* ir žymėsime $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ (tai lotyniškų žodžių *realis* ir *imaginarius* pirmosios raidės). Pavyzdžiui, kompleksinių skaičių $z = 4 - 3i$, $z = 0 - 2i$, $z = 5 + i0$ atitinkamai realiosios ir menamosios dalys yra: $\operatorname{Re} z = 4$, 0 ir 5, o $\operatorname{Im} z = -3$, -2 ir 0.

Kadangi realiųjų skaičių aibė R yra naujosios skaičių aibės C poaibis, tai joje lygybės sąvoka, sudėties bei daugybos veiksmai apibrėžiami taip, kad neprieštarautų realiųjų skaičių sudėties ir daugybos veiksmams:

1) du kompleksiniai skaičiai $z_1 = x_1 + iy_1$ ir $z_2 = x_2 + iy_2$ vadinami *lygiais*, jeigu

$$x_1 = x_2 \text{ ir } y_1 = y_2; \qquad (2)$$

2) skaičių $z_1 = x_1 + iy_1$ ir $z_2 = x_2 + iy_2$ suma yra skaičius

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \qquad (3)$$

3) skaičių $z_1 = x_1 + iy_1$ ir $z_2 = x_2 + iy_2$ sandauga yra skaičius

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \qquad (4)$$

Iš (4) formulės, paėmę joje $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = y_2 = 1$, gausime sąryšį

$$i \cdot i = i^2 = -1. \qquad (5)$$

Atkreipkime dėmesį, kad (4) formulės įsiminti nereikia. Ją gauname formaliai daugindami dvinarį $x_1 + iy_1$ iš dvinario $x_2 + iy_2$ ir pakeitę $i^2 = -1$.

1 pavyzdys. Raskime kompleksinių skaičių $z_1 = 2 + 3i$ ir $z_2 = -1 - 6i$ sumą ir sandaugą.

Sprendimas. Pagal (3) formulę

$$z_1 + z_2 = (2+3i)+(-1-6i) = 2-1+i(3-6) = 1-3i.$$

Šių skaičių sandaugą gausime formaliai sudauginę dvinarius $2+3i$, $-1-6i$ ir pasirėmę (5) formule:

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)(-1-6i) = -2-12i-3i-18i^2 = 16-15i.$$

Kompleksiniai skaičiai $x+iy$ ir $x-iy$, kurie vienas nuo kito skiriasi tik menamosios dalies ženklu, vadinami *jungtiniais kompleksiniais* skaičiais. Skaičiaus $z = x+iy$ jungtinis žymimas $\bar{z} = x-iy$.

Lengvai randame, kad $z+\bar{z} = 2x$ yra realusis skaičius, o $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ – realusis neneigiamas skaičius.

Dviejų kompleksinių skaičių $z_1 = x_1 + iy_1$ ir $z_2 = x_2 + iy_2$ *skirtumas* yra toks kompleksinis skaičius $z = x+iy$, kad $z_2 + z = z_1$. Iš čia

$$z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1). \quad (6)$$

Dviejų kompleksinių skaičių $z_1 = x_1 + iy_1$ ir $z_2 = x_2 + iy_2$ $(z_2 \neq 0)$ *dalmeniu* vadinamas kompleksinis skaičius $z = x+iy$, su kuriuo $z_1 \cdot z = z_2$. Iš čia

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1^2 + y_1^2}. \quad (7)$$

2 pavyzdys. Raskime kompleksinių skaičių $z_1 = 3-2i$ ir $z_2 = 8+3i$ skirtumą $z_2 - z_1$ bei dalmenį $\frac{z_2}{z_1}$.

Sprendimas. Pagal (6) formulę

$$z_2 - z_1 = (8+3i)-(3-2i) = 5+5i = 5(1+i),$$

o pagal (7) formulę –

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{8+3i}{3-2i} = \frac{3\cdot 8+(-2)\cdot 3}{3^2+(-2)^2} + i\frac{3\cdot 3-8(-2)}{3^2+(-2)^2} =$$

$$= \frac{24-6}{13} + i\frac{9+16}{13} = \frac{18}{13} + \frac{25}{13}i.$$

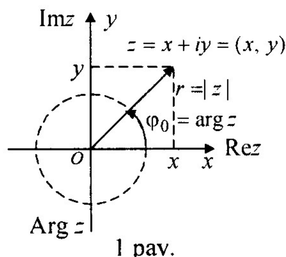
Šį rezultatą galima gauti nesinaudojant (7) formule, o trupmenos $\frac{8+3i}{3-2i}$ skaitiklį ir vardiklį padauginus iš vardiklio jungtinio kompleksinio skaičiaus $3+2i$:

$$\frac{8+3i}{3-2i}=\frac{(8+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{24+9i+16i-6}{9+4}=\frac{18}{13}+\frac{25}{13}i.$$

2. KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ GEOMETRINIS VAIZDAVIMAS. MODULIS IR ARGUMENTAS

Žinome, kad tarp realiųjų skaičių ir tiesės taškų aibių galioja abipusė vienareikšmė atitiktis. Kadangi kompleksinis skaičius $z=x+iy$ apibrėžiamas imant du realiuosius skaičius x ir y, tai tą skaičių patogu vaizduoti plokštumos tašku arba vektoriumi su koordinatėmis x ir y. Kiekvienam plokštumos taškui (1 pav.) $(x;y)$ priskiriamas kompleksinis skaičius $z=x+iy$. Taigi tarp kompleksinių skaičių ir plokštumos taškų yra abipus vienareikšmė atitiktis. Visi skaičiai $z=x+i0$ vaizduojami abscisių ašies, vadinamos *realiąja*, o skaičiai $z=0+iy$ – ordinačių arba *menamosios* ašies taškais (1 pav.).

Apibrėžimas. Bet kurio plokštumos taško $(x;y)$ atstumas iki koordinačių pradžios (arba vektoriaus $(x;y)$ ilgis) vadinamas kompleksinio skaičiaus *moduliu* ir žymimas $|z|=r$:



1 pav.

$$r=|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}. \quad (8)$$

Realiojo skaičiaus $z=x+i0$ modulis sutampa su jo absoliutiniu didumu:

$$|z|=|x+i0|=\sqrt{x^2}=|x|.$$

Jungtinių skaičių $z=x+iy$ ir $\bar{z}=x-iy$ moduliai yra lygūs, t.y. $|z|=|\bar{z}|$.

Apibrėžimas. Orientuotas kampas φ, kurį sudaro vektorius z $(z\neq 0)$ su teigiama realiąja pusaše (dėmens $2k\pi$, $k\in Z$, tikslumu), vadinamas skaičiaus $z=x+iy$ *argumentu* ir žymimas $\mathrm{Arg}\,z$.

Skaičiaus $z=0$ argumentas neapibrėžtas, o jo modulis lygus nuliui.

Intervalui $(-\pi;\pi]$ (arba intervalui $[0;2\pi)$) priklausanti kampo φ reikšmė vadinama *pagrindine argumento reikšme* ir žymima $\varphi_0=\arg z$.

Tada

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \text{ arba } \varphi = \varphi_0 + 2\pi k,\ k \in Z. \qquad (9)$$

Priklausomai nuo taško (vektoriaus) $z = (x;\ y)$ padėties koordinačių sistemoje, skaičiaus $z = x + iy$ pagrindinė argumento reikšmė apskaičiuojama taip:

$$\varphi_0 = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ kai } x > 0 \text{ (I ir IV ketv.)}, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, \text{ kai } x < 0,\ y > 0 \text{ (II ketv.)}, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, \text{ kai } x < 0,\ y < 0 \text{ (III ketv.)}. \end{cases} \qquad (10)$$

Jei $z = (x;\ y)$ yra realiosios arba menamosios ašies taškas, tai

$$\varphi_0 = \arg z = \begin{cases} 0, \text{ kai } x > 0,\ y = 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ kai } x = 0,\ y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ kai } x = 0,\ y < 0; \\ \pi, \text{ kai } x < 0,\ y = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Jungtinių kompleksinių skaičių pagrindinė argumento reikšmė skiriasi tik ženklu

$$\arg z = -\arg \bar{z}.$$

3 pavyzdys. Apskaičiuokime z modulį ir pagrindinę argumento reikšmę, kai

1) $z = 3 - 3i$; 2) $z = -4i$.

Sprendimas. 1. Skaičiaus $z = 3 - 3i$ modulį r apskaičiuojame naudodamiesi (8) formule:

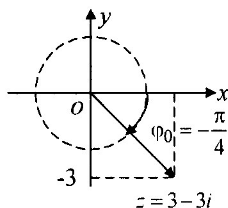
$$r = |3 - 3i| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}.$$

Kadangi skaičius $z = 3 - 3i$ yra ketvirtajame ketvirtyje (2 pav.), tai iš (10) formulės išplaukia, kad

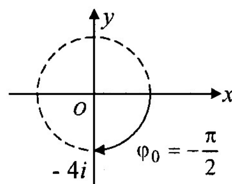
$$\varphi_0 = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{-3}{3} = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Ats.: $r = |z| = 3\sqrt{2}$; $\varphi_0 = \arg z = -\dfrac{\pi}{4}$.

Šiuo atveju visos galimos skaičiaus z argumento reikšmės yra



2 pav.



3 pav.

$\varphi = \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$

2. $|z| = |4i| = 4|i| = 4.$

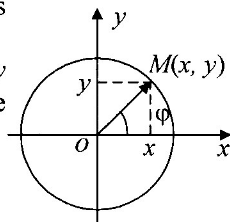
Iš (11) išplaukia, kad

$$\varphi_0 = \arg z = \arg(-4i) = -\frac{\pi}{2}, \text{ nes } x = 0, \ y = -4 < 0$$

(žr. 3 pav.).

3. KĖLIMAS LAIPSNIU IR ŠAKNIES TRAUKIMAS

Dydžiai r ir φ visiškai nusako vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ padėtį plokštumoje. Kadangi skaičiai x ir y yra vektoriaus projekcijos koordinatinėse ašyse (4 pav.), tai



4 pav.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Taigi kompleksinį skaičių $z = x + iy$ galima užrašyti šitaip:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi); \qquad (12)$$

čia r yra z modulis, o φ – bet kuris (gali būti ir φ_0) jo argumentas. Šis kompleksinio skaičiaus užrašas yra vadinamas jo *trigonometrine forma*. Daugeliu atvejų trigonometrinė kompleksinio skaičiaus forma yra patogesnė už algebrinę.

Pasinaudodami (12) formule lengvai randame, kad

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \quad (13)$$

Vadinasi, dauginant du kompleksinius skaičius, jų modulius reikia sudauginti, o argumentus sudėti.

Ieškodami dalmens, skaitiklį ir vardiklį dauginame iš vardiklio jungtinio skaičiaus ir atlikę veiksmus gauname:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right). \quad (14)$$

Taigi dalijant du kompleksinius skaičius, jų modulius reikia padalyti, o argumentus atimti.

Lygių kompleksinių skaičių $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$ sandaugą, sudarytą iš n dauginamųjų, vadiname n-uoju z laipsniu ir žymime z^n. Pritaikę (13) formulę, kai yra n dauginamųjų, gausime vadinamąją Muavro formulę

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad (15)$$

4 pavyzdys. Užrašykime skaičius $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ ir $z_2 = 1 - i$ trigonometrine forma ir apskaičiuokime $z_1 \cdot z_2$ ir $\frac{z_1}{z_2}$.

Sprendimas. Randame skaičių modulius:

$$r_1 = |z_1| = |-1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$r_2 = |z_2| = |1 - i| = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Skaičius $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ yra trečiajame ketvirtyje, todėl (pagal (10) formulę) $\varphi_1 = \arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{(-\sqrt{3})}{(-1)} - \pi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$.

Analogiškai

$$\varphi_2 = \arg z_2 = \operatorname{arctg}\frac{(-1)}{1} = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4},$$

nes skaičius z_2 yra ketvirtajame ketvirtyje. Tada skaičiai z_1 ir z_2 trigonometrine forma užrašomi taip:

$$z_1 = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Šių skaičių sandaugą ir dalmenį skaičiuojame pagal (13) ir (14) formules:

$$z_1 \cdot z_2 = 2\cdot\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} - i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} - i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

5 pavyzdys. Užrašykime trigonometrine forma kompleksinį skaičių

$$z = \frac{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3} + i\right)}{i - 1}.$$

Sprendimas. Skaičiaus $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ modulis $|z_1| = 1$, o argumentas

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3} \text{ (ketvirtas ketvirtis);}$$

skaičiaus $z_2 = \sqrt{3} + i$ modulis $|z_2| = 2$, o argumentas

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} \text{ (pirmas ketvirtis);}$$

skaičiaus $z_3 = -1 + i$ modulis $|z_3| = \sqrt{2}$, o argumentas

$$\varphi_3 = \text{arctg}\frac{1}{(-1)} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \text{ (antras ketvirtis).}$$

Todėl $|z| = \dfrac{|z_1|\cdot|z_2|}{|z_3|} = \dfrac{1\cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

$$\arg z = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11}{12}\pi,$$

o skaičiaus z trigonometrinė išraiška yra

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} - i\sin\frac{11\pi}{12}\right).$$

6 pavyzdys. Apskaičiuokime i^n, $n \in \mathrm{N}$.

Sprendimas. 1 būdas. Kadangi $i^1 = i$, $1\cdot i = i$, $(-1)\cdot i = -i$, $i^2 = -1$, tai

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i,$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1,$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = 1\cdot i = i,$$
$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1(-1) = -1,$$
$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1\cdot(-i) = -i,$$
$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1 = 1.$$

Matome, kad skaičiuojant vis aukštesnius i laipsnius periodiškai kartojasi tos pačios reikšmės: i; -1; $-i$, 1. Taigi

$$i^n = \begin{cases} 1, \text{ kai } n = 4k, \\ i, \text{ kai } n = 4k+1, \\ -1, \text{ kai } n = 4k+2, \\ -i, \text{ kai } n = 4k+3; \ k \in \mathrm{N}. \end{cases} \quad (16)$$

2 būdas. Skaičių i užrašome trigonometrine forma: $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Tada $i^n = \cos\frac{\pi n}{2} + i\sin\frac{\pi n}{2}$; $n \in \mathrm{N}$. Pagal formulę

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$
$$i^2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$i^3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i\,,$$

$$i^4 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \quad \text{ir t. t.}$$

7 pavyzdys. Apskaičiuokime $(-1+i)^{12}$.

Sprendimas. 1 būdas. Skaičių $z=-1+i$ užrašome trigonometrine forma: $|z| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$,

$$\varphi_0 = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{1}{(-1)} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \quad \text{(antras ketvirtis),}$$

$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Taikydami (15) formulę gauname:

$$\left(-1+i\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{12} = 2^6\left(\cos 9\pi + i\sin 9\pi\right) =$$

$$= 2^6\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = 2^6\cdot(-1) = -64\,.$$

Dabar apibrėšime n-ojo laipsnio šaknį iš kompleksinio skaičiaus z. Tai kompleksinis skaičius $w=\sqrt[n]{z}$, kurį pakėlus n-uoju laipsniu gaunamas skaičius z, t.y. $w^n = z$.

Tarkime, $z = r(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, ir ieškokime tokio

$$w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,, \tag{17}$$

kad galiotų lygybė

$$\left(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = r\left(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0\right)$$

arba

$$\rho^n\left(\cos n\alpha + i\sin n\alpha\right) = r\left(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0\right).$$

Ši lygybė teisinga, kai

$$\begin{cases}\rho^n = r,\\ n\alpha = \varphi_0 + 2k\pi,\ k\in Z\end{cases} \text{arba} \begin{cases}\rho = \sqrt[n]{r},\\ \alpha = \dfrac{\varphi_0 + 2k\pi}{n},\ k\in Z;\end{cases} \tag{18}$$

čia ρ yra aritmetinė (teigiamoji) šaknies reikšmė, o $\varphi_0 = \arg z$. Įrašę į (17) formulę ρ ir α reikšmes, turime

$$w = \sqrt[n]{r(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)} =$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right) \quad (19)$$

arba

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right); \quad (19a)$$

$k = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

Imdami $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$, gausime n skirtingų šaknies reikšmių (jei $r \neq 0$), nes kiekvienu atveju trigonometrinių funkcijų argumentai skirtingi. Kai $k = n$, gausime tokią pat šaknies reikšmę kaip ir atveju $k = 0$ (reikšmės pradeda kartotis). Šios (19) formule išreikštos šaknies reikšmės geometriškai yra taisyklingojo n-kampio, įbrėžto į apskritimą, viršūnės. Šio apskritimo centras yra taške (0; 0), o spindulys lygus $\sqrt[n]{r}$.

8 pavyzdys. Raskime visas šaknų $\sqrt[3]{i}$ ir $\sqrt[4]{81}$ reikšmes ir jas pavaizduokime geometriškai.

Sprendimas. Kadangi $i = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, tai pagal (19a) formulę $\sqrt[3]{i} = \cos\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}$; $k = 0, 1, 2$. Iš čia gauname tokias šaknies $\sqrt[3]{i}$ reikšmes:

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$
$$w_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$
$$w_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Geometriškai jos pavaizduotos 5a pav.

Dabar apskaičiuokime $\sqrt[4]{81}$:

$$\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{81(\cos 0+i\sin 0)}=\sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{4}+i\sin\frac{0+2k\pi}{4}\right);$$

$k=0,1,2,3.$

Pagal šią formulę:

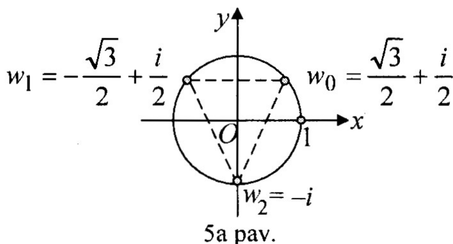
$w_0=3(\cos 0+i\sin 0)=3,$

$w_1=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=3i,$

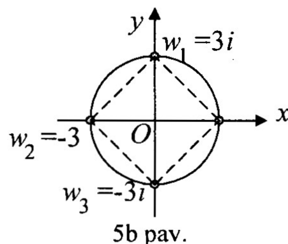
$w_2=3(\cos\pi+i\sin\pi)=-3,$

$w_3=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-3i.$

Visos keturios šaknies $\sqrt[4]{81}$ reikšmės pavaizduotos 5b pav.



5a pav.



5b pav.

4. KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ TAIKYMAI

Naudodamiesi kompleksiniais skaičiais galime spręsti dvinares lygtis, kurių bendroji išraiška

$$ax^n\pm b=0, \qquad (20)$$

$a,b\in \mathrm{R}$, $n\in \mathrm{N}$ (a, b gali būti ir kompleksiniai).

Kiekvieną dvinarę lygtį galima pakeisti to paties laipsnio lygtimi, kurios koeficientai prie nežinomojo ir laisvasis narys yra vienetai. Tai atliekama keitiniu $x=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}y$. Šį keitinį įrašę į (20) lygtį, turime:

$$a\cdot\frac{b}{a}y^n\pm b=0 \Leftrightarrow y^n\pm 1=0 \quad (b\neq 0).$$

Vadinasi, reikia mokėti spręsti dvinares lygtis $y^n+1=0$ ir $y^n-1=0$.

9 pavyzdys. Išspręskime lygtį $x^n-1=0$.

Sprendimas. $x^n-1=0 \Leftrightarrow x^n=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_k=\sqrt[n]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{0+2k\pi}{n}\right), k=0,1,\ldots,(n-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=0,1,\ldots,(n-1). \qquad (21)$$

Iš čia

$x_0=\cos 0+i\sin 0=1$,

$x_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$,

$x_2=\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}=x_1^2$,

$x_3=\cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n}=x_1^3$,

....

$x_{n-1}=\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=x_1^{n-1}$.

10 pavyzdys. Išspręskime lygtį $7x^4-16=0$.

Sprendimas. Pažymėkime $x=\sqrt[4]{\frac{16}{7}}y$. Tada

$$7\cdot\frac{16}{7}y^4-16=0;\ y^4-1=0.$$

Remdamiesi (21) formule, gauname

$y_k=\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}=\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}$; $k=0,1,2,3.$

Taigi

$y_0=\cos 0+i\sin 0=1$,

$y_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$,

$$y_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$y_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Tada $x_0 = \frac{2}{7}\sqrt[4]{343}$, $x_1 = \frac{2}{7}\sqrt[4]{343}\,i$, $x_2 = -\frac{2}{7}\sqrt[4]{343}$, $x_3 = -\frac{2}{7}\sqrt[4]{343}\,i$.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Su kuriomis realiosiomis x ir y reikšmėmis kompleksiniai skaičiai $z_1 = 2 + (5x - 3y)i$ ir $z_2 = 3x - 5y + 14i$ yra lygūs?

2. Atlikite veiksmus $(3-4i)\cdot 2i + \frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i}$.

3. Raskite kompleksinio skaičiaus $z = -\sqrt{3} + i$ modulį ir visas argumento reikšmes.

4. Užrašykite kompleksinį skaičių $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ trigonometrine forma imdami tik pagrindinę argumento reikšmę.

5. Raskite kompleksinių skaičių

$z_1 = 4(\cos 140^\circ + i\sin 140^\circ)$ ir $z_2 = 2(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)$

dalmenį.

6. Apskaičiuokite $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$.

7. Apskaičiuokite $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$.

8. Išspręskite lygtį $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$.

9. Raskite šaknies $\sqrt[4]{-16}$ reikšmių aibę ir pavaizduokite ją geometriškai.

10. Išspręskite dvinarę lygtį $27x^3+1=0$.



BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

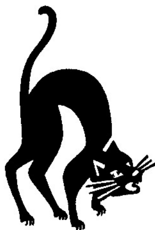
Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Sudauginkite skaičius, užrašytus šešetainėje sistemoje: $(352)_6 \cdot (245)_6$.

2. Pirmoje dėžėje yra 4 juodi ir 6 balti rutuliai, antroje – 3 juodi ir 7 balti rutuliai, besiskiriantys vienas nuo kito tik spalva. Iš pirmos dėžės atsitiktinai išimami du rutuliai ir perdedami į antrą dėžę. Po to iš antrosios dėžės atsitiktinai paimamas vienas rutulys. Apskaičiuokite tikimybę, kad šis rutulys bus baltas.

3. Raskite kompleksinio skaičiaus $(-1-i)^{15}$ modulį ir pagrindinę argumento reikšmę.

4. Lina, Jurgita, Rita ir Monika susitiko dainų šventėje. Jos atvažiavo iš Rokiškio, Zarasų, Utenos ir Druskininkų. Nustatykite, kuriame mieste gyvena kiekviena mergaitė, jei:
1) Lina negyvena nei Utenoje, nei Zarasuose;
2) Monika yra iš Rokiškio;
3) Rita negyvena Zarasuose.



Užduočių sprendimai



STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kadangi

$$\left(a+\sqrt{4a}+1\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}=\sqrt{a}+1,$$

$$\sqrt{a^3}+\sqrt{8b^3}=\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{2b}\right)^3=\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)\left(a-\sqrt{2ab}+2b\right),$$

$$\left(\sqrt[4]{2b}-\sqrt[4]{a}\right)^2+\left(\sqrt[4]{2b}+\sqrt[4]{a}\right)^2=2\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right),$$

tai nagrinėjamasis reiškinys lygus 0,5.

Ats.: 0,5.

2. Kadangi

$$\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4-2\sqrt{3},\quad \left(\sqrt{3}-1\right)^3=6\sqrt{3}-10,$$

tai

$$\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=1 \text{ ir } \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=1.$$

Taigi abi duotosios trupmenos yra lygios.

3. Pažymėkime ieškomuosius skaičius $\overline{xyz}$. Pirmasis skaitmuo tris kartus mažesnis už paskutinįjį: $3x=z$. Iš antrosios sąlygos gauname, kad skaičius

$$100x+10y+z+100x+10z+y=200x+11(y+z)$$

turi dalytis iš 8. Pirmasis šio skaičiaus dėmuo dalijasi iš 8. Vadinasi, iš 8 turi dalytis $y+z$. Kadangi $x=\frac{z}{3}$, tai galimos z reikšmės yra tik skaitmenys 3, 6 ir 9. Kai $z=3$, tuomet $y=5$, $x=1$. Kai $z=6$, tai $y=2$, $x=2$. Kai $z=9$, tai $y=7$, $x=3$.

Ats.: 153, 226, 379.

4. Pažymėkime stadiono takelio ilgį a m, pirmojo sportininko greitį – v_1 $\frac{\text{m}}{\text{sek}}$, o antrojo v_2 $\frac{\text{m}}{\text{sek}}$. Pagal sąlygą turi galioti lygčių sistema

$$\begin{cases} \dfrac{a}{v_2} - \dfrac{a}{v_1} = 5, \\ \dfrac{a}{v_1 - v_2} = 280 \end{cases}$$

($4\frac{2}{3}$ min $= \frac{14}{3}$ min $= \frac{14}{3} \cdot 60$ sek $= 280$ sek).

Išsprendę šią sistemą surasime sportininkų greičius:

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{a}{280} + v_2, \\ \dfrac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} = \dfrac{5}{a}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{a}{280} + v_2, \\ 1400v_2^2 + 5av_2 - a = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{a}{280} + v_2, \\ v_2 = \dfrac{a}{40}. \end{cases}$$

Taigi $v_1 = \frac{a}{280} + \frac{a}{40} = \frac{a}{35}$, $v_2 = \frac{a}{40}$. Jeigu sportininkai startuotų priešingomis krytimis, jie susitiktų po $\frac{a}{v_1 + v_2} =$

$$= \frac{a}{\frac{a}{35} + \frac{a}{40}} = \frac{1400}{75} = 18\frac{2}{3} \text{ sekundžių.}$$

Ats.: $18\frac{2}{3}$ sek.

5. Nelygybės apibrėžimo sritis $x \in R$, $x \neq -2$. Kai $x \leq -3$, gausime nelygybę

$$\frac{-(x+3)+x}{x+2} > 1, \text{ t.y. } \frac{-3}{x+2} - 1 > 0,$$

kai $x > -3$, $x \neq -2$ – nelygybę

$$\frac{2x+3}{x+2} > 1.$$

Vadinasi, turime išspręsti dvi nelygybių sistemas:

$$\begin{cases} x \le -3, \\ \dfrac{-3}{x+2} - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x > -3, \\ x \ne -2, \\ \dfrac{2x+3}{x+2} > 1. \end{cases}$$

Pirmosios sistemos sprendinių aibė yra intervalas (–5; –3], o antrosios – $(-3; -2) \cup (-1; +\infty)$. Sujungę šias aibes, gausime $(-5; -2) \cup (-1; +\infty)$.

Ats.: $(-5; -2) \cup (-1; +\infty)$.

6. Kadangi turi būti $x^2 - 5{,}5x + 6 \ge 0$ ir $x^2 + 0{,}5x - 3 \ge 0$, tai iš pradžių išspręskime nelygybių sistemą

$$\begin{cases} x^2 - 5{,}5x + 6 \ge 0, \\ x^2 + 0{,}5x - 3 \ge 0. \end{cases}$$

Gauname

$$\begin{cases} x \le 1{,}5 \text{ arba } x \ge 4, \\ x \le -2 \text{ arba } x \ge 1{,}5. \end{cases}$$

Taigi arba $x \le -2$, arba $x = 1{,}5$, arba $x \ge 4$. Toliau nagrinėkime duotąją sistemą.

Kai $x \le -2$, tai $x - 2 < 0$ ir $\sqrt{x^2 - 5{,}5x + 6} > 0$. Todėl pirmoji nelygybė (taigi ir sistema) sprendinių neturi.

Skaičius $x = 1{,}5$ tenkina abi nelygybes, todėl yra sistemos sprendinys.

Kai $x \ge 4$, tai $x + 1 > 0$ ir $\sqrt{x^2 + 0{,}5x - 3} > 0$. Taigi ir šiuo atveju sistema sprendinių neturi, nes $(x+1)\sqrt{x^2 + 0{,}5x - 3} > 0$.

Ats.: 1,5.

7. Aišku, kad $y \ne 0$ (jei būtų $y = 0$, tai iš antros lygties gautume $0 = -3$). Pirmąją lygtį padauginkime iš y. Gausime

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x+2y} + y^2 = 2y, \\ \dfrac{y}{x+2y} = -3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 + y^2 = 2y, \\ \dfrac{y}{x+2y} = -3; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -1 \text{ arba } y = 3, \\ \dfrac{y}{x+2y} = -3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1\ , \\ \dfrac{y}{x+2y} = -3; \end{cases} \text{arba} \begin{cases} y = 3\ , \\ \dfrac{y}{x+2y} = -3; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -1\ , \\ \dfrac{-1}{x-2} = -3; \end{cases} \text{arba} \begin{cases} y = 3\ , \\ \dfrac{3}{x+6} = -3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1\ , \\ x = \dfrac{7}{3}; \end{cases} \text{arba} \begin{cases} y = 3\ , \\ x = -7. \end{cases}$$

Ats.: $\left(\dfrac{7}{3}; -1\right)$, $(-7; 3)$.

8. Kadangi

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) =$$
$$= (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x),$$

o $\sin x + \cos x = a$, tai

$$\sin^3 x + \cos^3 x = a(1 - \sin x \cos x).$$

Kita vertus, iš lygybės

$$(\sin x + \cos x)^2 = a^2$$

gauname, kad $\sin x \cos x = \dfrac{a^2 - 1}{2}$. Todėl

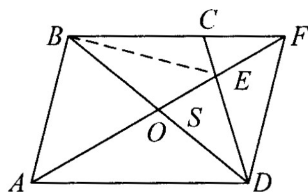
$$\sin^3 x + \cos^3 x = a\left(1 - \frac{a^2 - 1}{2}\right) = \frac{a(3 - a^2)}{2} = -0{,}5a(a^2 - 3).$$

Taigi

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{(a^2 - 3)a} = \frac{-0{,}5a(a^2 - 3)}{(a^2 - 3)a} = -0{,}5.$$

Ats.: –0,5.

9. Sakykime $S_{OED}=S$. Pagal sąlygą $AO:OE=2:1$, todėl $S_{AOB}=2S_{OBE}$ ir $S_{OBE}=0{,}5$.



$\Delta CEF\sim\Delta AED$, todėl

$\frac{FE}{3OE}=\frac{CE}{ED}=\frac{1}{2}$; $FE=\frac{3}{2}OE$. Taigi

$S_{BEF}=\frac{3}{2}S_{OBE}=\frac{3}{4}$. Kita vertus,

$S_{DEF}=\frac{3}{2}S$, o $S_{EFC}=\frac{3}{4}S$. Kadangi

$S_{BEC}=\frac{1}{2}S_{DBE}=\frac{1}{2}\left(S+\frac{1}{2}\right)$ ir $S_{BEC}=S_{BEF}-S_{EFC}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}S$,

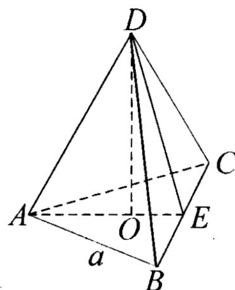
tai $\frac{1}{2}S+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}S$, t.y. $S=\frac{2}{5}=0{,}4$.

Ats.: 0,4.

10. Kadangi piramidė yra taisyklingoji, tai visos šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai statieji trikampiai. Taigi

$\angle BDE=45^\circ$ ir $BE=DE=\frac{a}{2}$; čia a – piramidės pagrindo kraštinės ilgis. Be to,

$AE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $OE=\frac{1}{3}AE=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.



2 pav.

Iš stataus trikampio DOE:

$\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2+h^2$, t. y. $\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{12}+h^2$.

Iš čia

$$a=h\sqrt{6}.$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{6h^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{2}h^3.$$

Ats.: $\frac{\sqrt{3}}{2}h^3$.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$;

$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$;

$\frac{4}{11}=\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{44}=\frac{1}{3}+\frac{1}{33}$;

$\frac{7}{17}=\frac{1}{3}+\frac{1}{17}+\frac{1}{51}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{34}+\frac{1}{68}+\frac{1}{153}$;

$\frac{47}{60}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{30}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{60}$.

2. Užpildome lentelę.

Indų-arabų skaičiavimo sistema	Romėnų skaičiavimo sistema	Graikų skaičiavimo sistema	Egiptiečių skaičiavimo sistema
4873	MMMMDCCCLXXIII	δ'ωογ	𓆼𓆼𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺
1 033 154	$\overline{\text{MXXXIII}}$CLIV	α''γΜγ'ρνδ	𓁨𓂭𓂭𓂭𓆼𓆼𓆼𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺
10 219	$\overline{\text{X}}$CCXIX	ι'σιθ arba αΜσιθ	𓂭𓍢𓍢𓎆 𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺
482	CDLXXXII	υπβ	𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺

3. Pradinio skaičiaus vienetų skaičių pažymėkime raide a, dešimčių – b, šimtų – c, o tūkstančių – d. Tada skaičių galima užrašyti taip:

$$1\,000d+100c+10b+a.$$

Pagal duotą sąlygą sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} d+c+b+a=10, \\ 1\,000d+100c+10b+a+2997=1\,000a+100c+10b+d, \\ 1\,000d+100c+10b+a+90=1\,000d+100b+10c+a, \\ 1\,000d+100b+10c+a+1\,000d+100c+10b+a=2558. \end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą gauname, kad $a=4$, $b=3$, $c=2$, $d=1$. Taigi pradinis skaičius yra 1234.

Ats.: 1234.

4. $99=49\cdot 2+1=(24\cdot 2+1)2+1=((12\cdot 2)2+1)2+1=$

$=(((6\cdot 2)2)2+1)2+1=(3\cdot 2^4+1)2+1=((1\cdot 2+1)2^4+1)2+1=$

$=1\cdot 2^6+1\cdot 2^5+1\cdot 2+1=1100011_2$,

$99=19\cdot 5+4=(3\cdot 5+4)5+4=3\cdot 5^2+4\cdot 5+4=344_5$,

$99=12\cdot 8+3=(1\cdot 8+4)8+3=1\cdot 8^2+4\cdot 8+3=143_8$,

$99=8\cdot 12+3=83_{12}$.

5. $100101_2=1\cdot 2^5+1\cdot 2^2+1=32+4+1=37$,

$34101_5=3\cdot 5^4+4\cdot 5^3+1\cdot 5^2+1=1875+500+25+1=2401$,

$7301_8=7\cdot 8^3+3\cdot 8^2+1=3584+192+1=3777$,

$34E01_{12}=3\cdot 12^4+4\cdot 12^3+11\cdot 12^2+1=62208+6912+1584+1=$

$=70705$.

6. a) $2\cdot 12+3=4x+3$, $x=6$;

b) $37_8=3\cdot 8+7=31=6\cdot 5+1=(1\cdot 5+1)5+1=$

$=1\cdot 5^2+1\cdot 5+1=111_5$, $x=111$;

c) $x_{12}=100010_2$, $100010_2=1\cdot 2^5+1\cdot 2=34=2\cdot 12+10=2T_{12}$, $x=2T$.

Ats.: a) 6, b) 111, c) 2T.

7. Sudarykime aštuntainės sistemos sudėties ir daugybos lenteles.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

8. *Ats.:* a) 4456_8, 1300_8; b) 11336_8, 431232_8.

9. Trejetainės sistemos skaičių, kurio skaitmenys yra $a, b, \dots, c, d$, galima užrašyti tokiu būdu:

$$a \cdot 3^n + b \cdot 3^{n-1} + \dots + c \cdot 3 + d .$$

Bet koks trejeto laipsnis yra nelyginis skaičius, todėl $3^k = 2m + 1$ ir

$$\begin{aligned} & a \cdot 3^n + b \cdot 3^{n-1} + \dots + c \cdot 3 + d = \\ & = a \cdot (2u + 1) + b \cdot (2v + 1) + \dots + c \cdot (2 + 1) + d = \\ & = (2au + 2bv + \dots + 2c) + (a + b + \dots + c + d) = \\ & = 2t + a + b + \dots + c + d. \end{aligned}$$

Pirmasis dėmuo dalijasi iš dviejų, todėl skaičiaus dalumą iš dviejų nulemia likusių dėmenų suma. Taigi aišku, kad trejetainės sistemos skaičius dalijasi iš 2 tada ir tik tada, kai jo trejetainių skaitmenų suma $a+b+...+c+d$ dalijasi iš 2.

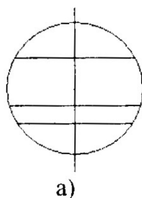
Apibendrinimas n-tainei sistemai: n-tainės sistemos skaičius dalijasi iš $n-1$ tada ir tik tada, kai jo n-tainių skaitmenų suma dalijasi iš $n-1$.

10. *Ats.:*

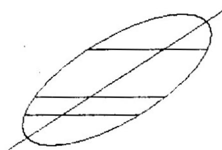
A		B		C		D	
12	8	12	4	10	2	9	1
13	9	13	5	11	3	11	3
14	10	14	6	14	6	13	5
15	11	15	7	15	7	15	7

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kadangi elipsė yra apskritimo lygiagrečioji projekcija, atkreipkime dėmesį į tas apskritimo savybes, kurios išlieka lygiagrečiai projektuojant.



a)



b)

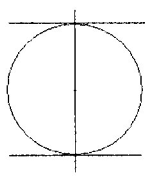
1 pav.

Apskritimo lygiagrečiųjų stygų vidurio taškai yra vienoje tiesėje – tiesėje, kurioje yra stygoms statmenas skersmuo (1 pav., a).

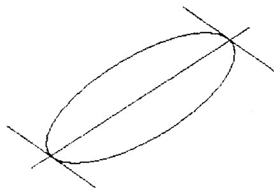
Apskritimo lygiagrečių stygų lygiagrečioji projekcija yra apskritimo lygiagrečiosios projekcijos – elipsės – lygiagrečiosios stygos. Kiekvienos stygos vidurio taško lygiagrečioji projekcija yra tos

stygos projekcijos vidurio taškas. Kadangi tiesės lygiagrečioji projekcija yra tiesė, tai elipsės lygiagrečiųjų stygų vidurio taškai yra vienoje tiesėje – tiesės, kurioje yra apskritimo lygiagrečiųjų stygų vidurio taškai, lygiagrečiojoje projekcijoje.

2. Apskritimo liestinės (tiesės, su apskritimu turinčios tik po vieną bendrą tašką) jo skersmens galuose yra statmenos tam skersmeniui, todėl yra lygiagrečios (2 pav.,a).



a)



b)

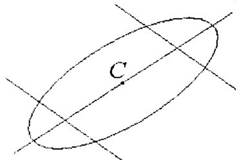
2 pav.

Apskritimo skersmens lygiagrečioji projekcija yra elipsės skersmuo.

Apskritimo liestinės lygiagrečioji projekcija yra tiesė, su elipse turinti tik vieną bendrą tašką, t.y. elipsės liestinė.

Lygiagrečiųjų tiesių lygiagrečioji projekcija yra lygiagrečiosios tiesės, todėl elipsės liestinės jos skersmens galuose yra lygiagrečios (2 pav.,b).

3. Apskritimo centras yra jo skersmens vidurio taškas. Todėl elipsės centras yra jo skersmens vidurio taškas. Vadinasi, nubrėžtos elipsės centrą galime rasti taip (3 pav.):
   a) nubrėžiame dvi lygiagrečias elipsės stygas;
   b) per tų stygų vidurio taškus nubrėžiame elipsės skersmenį;
   c) randame to skersmens vidurio tašką – elipsės centrą *C*.



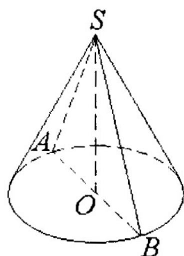
3 pav.

4. Elipsė (kai ją brėžiame pagal šabloną) neturi „smailumų" taškuose *A* ir *B*, kaip pavaizduota 5 paveiksle. To reikia vengti ir brėžiant kūgį „iš akies".

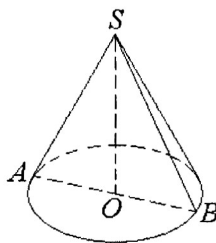
Kūgio vaizdo kontūro sudaromosios (jos irgi brėžiamos „iš akies") yra kūgio pagrindo apskritimą vaizduojančios elipsės liestinės, nutiestos iš taško *S*. Lietimosi taškai negali būti skersmens galai, nes elipsės liestinės jos skersmens galuose yra lygiagrečios (žr. 2 uždavinį).

Taigi kūgį galime pavaizduoti šitaip. Brėžiame (pagal šabloną arba „iš akies") kūgio pagrindo apskritimo atvaizdą – elipsę (4 pav., a). Iš jo centro *O* (jo radimą *žr.* 3 uždavinyje, arba pažymėkime „iš akies") einančioje vertikalioje tiesėje pasirinkime kūgio viršūnės atvaizdą – tašką *S*. Iš taško *S* („iš akies") nubrėžkime elipsės liestines. Turime kūgio atvaizdą. Per elipsės centrą nubrėžę jos skersmenį ir jo galus *A* bei *B* sujungę su tašku *S*, gauname ir kūgio ašinio pjūvio atvaizdą (4 pav., a).

Kad paveiksle būtų mažiau linijų, ašinio pjūvio atvaizdui braižyti galime panaudoti vieną kontūro sudaromąją (4 pav., b).



a)



b)

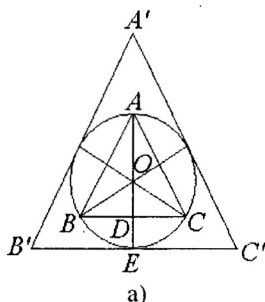
4 pav.

5. Čia irgi atkreipkime dėmesį į tas į apskritimą įbrėžto (apie apskritimą apibrėžto) taisyklingojo trikampio savybes, kurios išlieka lygiagrečiai projektuojant.

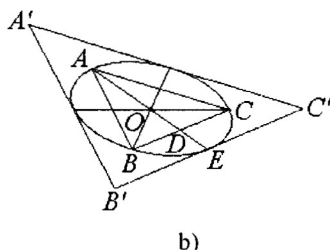
5 a pav. į apskritimą įbrėžtas taisyklingasis trikampis *ABC*. Jo kraštinė *BC* eina per skersmens *AE* spindulio *OE* vidurio tašką *D* ir yra lygiagreti su apskritimo liestine taške *E*.

Vadinasi, į apskritimą įbrėžto lygiakraščio trikampio lygiagre-

čiąją projekciją galime pavaizduoti šitaip. Nubrėžiame elipsę (5 b pav.). Pasirenkame jos tašką *A*. Per tašką *A* ir elipsės centrą *O* nubrėžiame elipsės skersmenį. Per tašką *A* ir elipsės *O* nubrėžiame elipsės skersmenį. Per to skersmens kitą galą brėžiame elipsės liestinę. Per skersmens *AO* spindulio *OE* vidurio tašką *D* brėžiame tiesę, lygiagrečią su nubrėžta elipsės liestine. Jos ir elipsės susikirtimo taškai *B* ir *C* yra ieškomo į apskritimą įbrėžto taisyklingojo trikampio *ABC* lygiagrečiosios projekcijos viršūnės.



a)



b)

5 pav.

Apie apskritimą apibrėžto taisyklingojo trikampio *A'B'C'* (5 a pav.) kraštinės yra apskritimo liestinėse, einančiose per apskritimo skersmenų, einančių per įbrėžto į apskritimą taisyklingojo trikampio viršūnes *A*, *B*, *C*, galus (tos liestinės lygiagrečios su trikampio *ABC* kraštinėmis).

Taip pat braižoma ir apie apskritimą apibrėžto taisyklingojo trikampio lygiagrečioji projekcija – trikampis *A'B'C'* (5 b pav.).

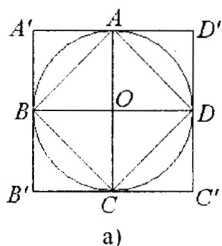
Pagalvokite, kaip dar galima nubrėžti apie apskritimą apibrėžto taisyklingojo trikampio lygiagrečiąją projekciją.

6. Šis uždavinys sprendžiamas panašiai kaip 5 uždavinys.

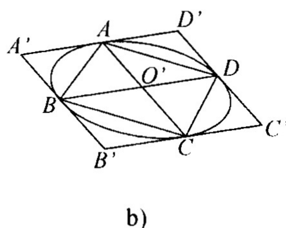
Į apskritimą įbrėžto kvadrato *ABCD* (6 a pav.) viršūnės *A* ir *C* yra skersmens galai, viršūnės *B* ir *D* – su apskritimo liestine taške *C* lygiagretaus apskritimo skersmens galai.

Vadinasi, į apskritimą įbrėžto kvadrato lygiagrečiąją projekciją galime pavaizduoti šitaip. Nubrėžiame elipsę (6 b pav.). Pasirenkame jos tašką *A*. Per tašką *A* ir elipsės centrą *O* nubrėžiame

elipsės skersmenį. Per to skersmens kitą galą C brėžiame elipsės liestinę. Per elipsės centrą O brėžiame su ta liestine lygiagretų skersmenį BD. Keturkampis $ABCD$ – į apskritimą įbrėžto kvadrato lygiagrečioji projekcija.



a)



b)

6 pav.

Apie apskritimą apibrėžto kvadrato viršūnės A', B', C', D' yra per į apskritimą įbrėžto kvadrato $ABCD$ viršūnes einančiose apskritimo liestinėse (jos lygiagrečios su kvadrato $ABCD$ įstrižainėmis; 6 a pav.).

Taip pat randama ir apie apskritimą apibrėžto kvadrato lygaigrečioji projekcija $A'B'C'D'$ (6 b pav.).

7. Parabolės $y = ax^2$ ir tiesės $y = mx + n$ taškų koordinatės yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} y = ax^2, \\ y = mx + n \end{cases}$$

sprendiniai.

Iš antrosios lygties y įrašę į pirmąją lygtį ir pertvarkę, gauname kvadratinę lygtį

$$ax^2 - mx - n = 0.$$

Jos diskriminantas

$$D = m^2 + 4an.$$

Tarkime, kad $D > 0$, t.y. gauta kvadratinė lygtis turi dvi skirtingas šaknis x_1 ir x_2. Tada tiesė parabolėje iškerta stygą M_1M_2,

$M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, y_1 ir y_2 gaunami iš sistemos antros lygties.

Pritaikę Vieto teoremą, randame stygos M_1M_2 vidurio taško $M(x;y)$ abscisę

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\text{ t.y. } x=\frac{m}{2a}.$$

Jei nagrinėjame lygiagrečias stygas, t.y. m nekeičiame, o keičiame tik n, tai

$$x=\frac{m}{2a}$$

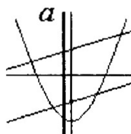
yra su ašimi Oy lygiagrečios tiesės lygtis.

Tiesės $x=p$ parabolę $y=ax^2$ kerta tik viename taške, todėl su ašimi Oy lygiagrečių parabolės stygų neturime.

Taigi įrodėme, kad parabolės lygiagrečių stygų vidurio taškai yra vienoje tiesėje. Ji vadinama parabolės skersmeniu.

Visi parabolės skersmenys yra lygiagretūs.

8. Parabolės simetrijos ašis yra parabolės skersmuo, kuris jam statmenas stygas dalija pusiau. Taigi parabolės simetrijos ašį galime brėžti šitaip. Nubrėžiame dvi lygiagrečias parabolės stygas (7 pav.). Per jų vidurio taškus nubrėžiame parabolės skersmenį. Nubrėžiame bet kurią parabolės skersmeniui statmeną jos stygą. Per tos stygos vidurio tašką nubrėžta su skersmeniu lygiagreti tiesė a yra parabolės simetrijos ašis.



7 pav.

9. Sakykime, tiesė $y=mx+n$ yra parabolės $y=ax^2$ liestinė. Tada 7 uždavinyje gautos kvadratinės lygties diskriminantas $D=0$, t.y.

$$m^2+4an=0,\ n=-\frac{m^2}{4a}.$$

Vadinasi, parabolės $y = ax^2$ liestinės lygtis yra

$$y = mx - \frac{m^2}{4a}.$$

Kadangi lygtis tiesės ir parabolės bendro taško abscisėms rasti šiuo atveju yra (žr. 7 uždavinį)

$$4a^2x_0^2 - 4amx_0 + a^2 = 0,$$

tai $x_0 = \frac{m}{2a}$, $y_0 = a \cdot \left(\frac{m}{2a}\right)^2 = \frac{m^2}{4a}$, t.y. lietimosi taškas yra $\left(\frac{m}{2a}; \frac{m^2}{4a}\right)$.

10. Sakykime, taško A koordinatės yra $\left(\frac{m}{2a}; \frac{m^2}{4a}\right)$. Tada liestinės lygtis yra $y = mx - \frac{m^2}{4a}$ (žr. 9 uždavinį).

Taško N koordinatės yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} y = mx - \frac{m^2}{4a}, \\ x = 0 \end{cases}$$

sprendinys, t.y. $N\left(0; -\frac{m^2}{4a}\right)$.

Tada

$$NF = \left|\frac{1}{4a} - \left(-\frac{m^2}{4a}\right)\right| = \frac{1 + m^2}{4a},$$

$$AF = \sqrt{\left(0 - \frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{4a} - \frac{m^2}{4a}\right)^2} = \frac{1 + m^2}{4a}$$

(čia pritaikėme atstumo tarp dviejų taškų formulę).

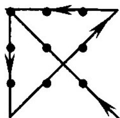
Kadangi $NF = AF$, tai ΔAFN – lygiašonis, $\angle FAN = \angle FNA$. Tada lygūs ir lankeliais pažymėti kampai (remiamės lygiagrečiųjų tiesių ir jų kirstinės sudarytų kampų savybėmis).

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

METODINĖJE MEDŽIAGOJE PATEIKTŲ PAVYZDŽIŲ SPRENDIMAS

1. Dvi trūkstamas kvadrato kraštines gali sudaryti, pavyzdžiui, stalo kampas.

2. METRAΣ.

3. 

„Barzdaskučio paradoksas“.

I galimybė: barzdaskutys skutasi pats, tuomet jis priklauso tiems gyventojams, kurių (remiantis skelbimu) jis negali skusti, taigi, barzdaskutys negali pats skustis. Gavome prieštarą.

II galimybė: barzdaskutį skuta kas nors kitas, tuomet barzdaskutys priklauso tiems gyventojams, kurie nesiskuta patys. Skelbime sakoma, kad barzdaskutys skuta visus, kas nesiskuta pats, todėl jis turi pats skustis. Gavome prieštarą.

Matyt, kad šio barzdaskučio negali skusti niekas!

Sudarykime teiginių $(A \supset B) \sim [\neg(A \& \neg B)]$, $A \& \neg A$, $A \supset (B \supset C)$ ir $A \supset (B \& C)$ teisingumo lenteles:

A	B	$A \supset B$	$\neg B$	$A \& \neg B$	$\neg(A \& \neg B)$	$(A \supset B) \sim [\neg(A \& \neg B)]$
t	*t*	*t*	*n*	*n*	*t*	*t*
t	*n*	*n*	*t*	*t*	*n*	*t*
n	*t*	*t*	*n*	*n*	*t*	*t*
n	*n*	*t*	*t*	*n*	*t*	*t*

Matome, kad teiginys $(A \supset B) \sim [\neg(A \& \neg B)]$ yra tautologija.

A	$\neg A$	$A \& \neg A$
t	*n*	*n*
n	*t*	*n*

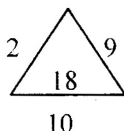
Teiginys $A \& \neg A$ yra prieštara.

A	B	C	$B \supset C$	$B \& C$	$A \supset (B \supset C)$	$A \supset (B \& C)$
t	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*
t	*t*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*
t	*n*	*t*	*t*	*n*	*t*	*n*
n	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*
t	*n*	*n*	*t*	*n*	*t*	*n*
n	*t*	*n*	*n*	*n*	*t*	*t*
n	*n*	*t*	*t*	*n*	*t*	*t*
n	*n*	*n*	*t*	*n*	*t*	*t*

Paskutinieji du stulpeliai rodo, kad teiginiai $A \supset (B \supset C)$ ir $A \supset (B \& C)$ yra išpildomi.

UŽDUOČIŲ SPRENDIMAI

1. a)



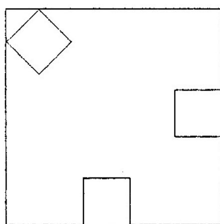
$$18 = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10}{10}$$

b)

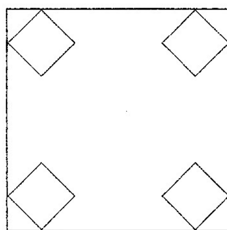
2		
3	4	5

Kiekvienoje kitoje (iš kairės į dešinę) figūroje skaičiai perstumiami laikrodžio rodyklės kryptimi per tiek langelių, kokia yra skaičiaus reikšmė.

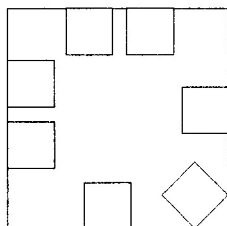
2. a)



b)

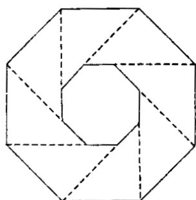


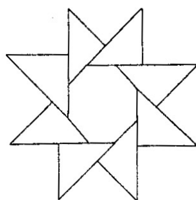
c)



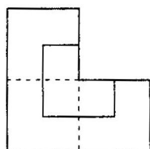
3. Šalia 11 testamentu paliktų mašinų reikia pastatyti dar vieną, bet kurią, tarkim, tuo metu važiavusią pro šalį, tuomet turėsime 12 mašinų. Po to pusę, arba 6 mašinas, reikia atiduoti vyriausiajam sūnui, ketvirtį, arba 3 mašinas – viduriniajam ir vieną šeštąją, arba 2 mašinas – jauniausiajam sūnui. $6+3+2=11$ mašinų. O šalia jų stovėjusi mašina gali ramiai važiuoti toliau!

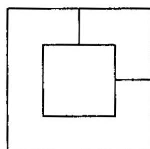
4. a)





b)





5. Tarkime, kad pirmasis apklausiamasis (pažymėkime jį A) yra čiabuvis, tuomet jis ir prisistato esąs čiabuvis. Antrasis apklausiamasis (pažymėkime jį B) sako teisybę, o trečiasis (pažymėkime jį C) – meluoja.

Jeigu A – kolonistas, tai jis prisistato esąs čiabuvis. B ir šiuo atveju sako teisybę, o C – meluoja. Vadinasi, antrasis liudytojas yra čiabuvis, o trečiasis – kolonistas.

6. Šio triuko esmė tokia: nurodytas skirtumas turi skaitinę šaknį, lygią 9. Kai jums sakomi skaičiai, jūs juos mintyse turite sudėti, kiekvieną kartą imdami tik liekaną moduliu 9. Kai bus pasakytas paskutinis skaičius, jūs iš 9 atimate savo gautąjį rezultatą ir sužinote, koks skaičius buvo išbrauktas. (Jei jūsų gautas rezultatas lygus 9, tai buvo išbrauktas skaičius 9.)

7.

Pavardė / Profesija	Kalvelis	Dailidė	Puodžiūnas	Šikšnius	Stiklius
Kalvis			O		
Dailidė					O
Puodžius	O				
Šikšnius		O			
Stiklius				O	

8. Jei keliautojas sakė teisybę, jį turėjo praleisti į salą, bet kad jo teiginys taptų teisybe – reikia pakarti keliautoją, bet kariama tik sumelavus.

Jei keliautojo teiginys – melas, jį reikia pakarti pagal įstatymą, bet pakorus išaiškėtų, kad keliautojas sakė teisybę, o tuomet jį reikia praleisti į salą.

Matome, kad abiem atvejais reikia atlikti vienas kitam prieštaraujančius veiksmus, kas yra neįvykdoma. Gavome paradoksą.

9.

A	B	C	$A\&B$	I $(A\&B)\supset C$	$A\supset B$	$\neg(A\supset B)$
t	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*n*
t	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*	*n*
t	*n*	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*
n	*t*	*t*	*n*	*t*	*t*	*n*
t	*n*	*n*	*n*	*t*	*n*	*t*
n	*t*	*n*	*n*	*t*	*t*	*n*
n	*n*	*t*	*n*	*t*	*t*	*n*
n	*n*	*n*	*n*	*t*	*t*	*n*

$\neg B$	$C\vee\neg B$	II $\neg(A\supset B)\&(C\vee\neg B)$	I~II
n	*t*	*n*	*n*
n	*n*	*n*	*t*
t	*t*	*t*	*t*
n	*t*	*n*	*n*
t	*t*	*t*	*t*
n	*n*	*n*	*n*
t	*t*	*n*	*n*
t	*t*	*n*	*n*

Kadangi paskutiniame lentelės stulpelyje yra įvairios teisingumo reikšmės, tai teiginys $[(A\&B)\supset C]\sim[\neg(A\supset B)\&(C\vee\neg B)]$ yra išpildomas.

10. Teiginį „iš stoties išvyksta traukinys X“ pažymėkime raide x (čia $X = A, B, C$, o $x = a, b, c$), tuomet uždavinio sąlygą teiginių logikos simboliais galėsime užrašyti taip:

I) $(a \& b) \supset c$,

II) $(b \& c) \supset a$.

Mums reikia patikrinti, ar, esant patenkintoms I ir II sąlygoms, bus patenkinta ir sąlyga

III) $(a \& c) \supset b$,

t.y., išvykstant traukiniams A ir C, iš stoties turi išvykti ir traukinys B. Visų trijų sąlygų teisingumas yra ekvivalentus teiginio

$$Q: \{[(a \& b) \supset c] \& [(b \& c) \supset a]\} \supset [(a \& c) \supset b]$$

teisingumui. Sudarykime šio teiginio teisingumo lentelę:

a	b	c	$a\&b$	I $(a \& b) \supset c$	$b\&c$	II $(b \& c) \supset a$
t	*t*	*t*	*t*	***t***	*t*	***t***
t	*t*	*n*	*t*	*n*	*n*	*t*
t	*n*	*t*	*n*	***t***	*n*	***t***
n	*t*	*t*	*n*	*t*	*t*	*n*
t	*n*	*n*	*n*	***t***	*n*	***t***
n	*t*	*n*	*n*	***t***	*n*	***t***
n	*n*	*t*	*n*	***t***	*n*	***t***
n	*n*	*n*	*n*	***t***	*n*	***t***

I&II	$a\&c$	III $(a \& c) \supset b$	Q I&II⊃III
t	*t*	***t***	*t*
n	*n*	*t*	*t*
t	*t*	***n***	*n*
n	*n*	*t*	*t*
t	*n*	***t***	*t*
t	*n*	***t***	*t*
t	*n*	***t***	*t*
t	*n*	***t***	*t*

Matome, kad Q nėra tautologija, be to, išskirtosios lentelėje reikšmės rodo, kad kai I ir II yra teisingi teiginiai (tik tokios jų reikšmės atitinka uždavinio sąlygą), III gali ir nebūti teisingas (žr. trečiąją lentelės eilutę), todėl darome išvadą, kad, išvykstant iš stoties traukiniams A ir C, traukinys B gali išvykti, bet nebūtinai.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kadangi $f(x)$ reikšmių aibė sutampa su $g(x)$ apibrėžimo sritimi, o $g(x)$ reikšmių aibė sutampa su $f(x)$ apibrėžimo sritimi, tai užtenka patikrinti dvi atvirkštinių funkcijų tenkinamas tapatybes:

1) $f(g(x)) = x$, $x \in (-\infty; -1)$;

2) $g(f(x)) = x$, $x \in (1; +\infty)$.

2. Pavyzdžiui, $f(x) = \dfrac{2x+3}{5x-2}$.

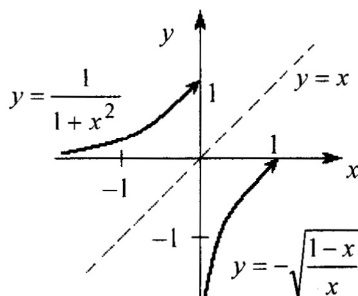
3. Kadangi skirtingoms argumento reikšmėms atitinka skirtingos funkcijos reikšmės, tai $f(x)$ turi atvirkštinę f^{-1}: $Y \to X$ ir $f^{-1}(-2) = 4$; $f^{-1}(0) = -3$, $f^{-1}(3) = 1$.

4. Funkcija $f(x)$ apibrėžta tik taškuose –3 ir 1. Kadangi $f(-3) = -2$, $f(1) = 2$, tai $f^{-1}(-2) = -3$; $f^{-1}(2) = 1$.

5. Funkcija $f(x)$ yra didėjanti ir jos reikšmių aibė yra (0; 1). Apskaičiavę x iš lygybės $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, kai $x \in (-\infty; 0)$, gauname $\left(1 + x^2 = \dfrac{1}{y},\ x^2 = \dfrac{1-y}{y},\ x = \pm\sqrt{\dfrac{1-y}{y}}\right)$: $x = -\sqrt{\dfrac{1-y}{y}}$. Sukeitę x ir

y vietomis, turime $y=-\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$, $x\in(0;1)$. Taigi $f^{-1}(x)=-\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$, $x\in(0;1)$.

Toliau pateikiame $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in(-\infty;0)$ ir $y=-\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$, $x\in(0;1)$, grafikus.



6. Nesunku įsitikinti, kad $f(x_1)\neq f(x_2)$, kai $x_1, x_2\in(0;1)$ ir $x_1\neq x_2$. Funkcijos $f(x)$ reikšmių aibė $(1;+\infty)$. Išsprendę x iš lygybės $y=\dfrac{x^2+1}{2x}$, gauname $x=y\pm\sqrt{y^2-1}$, $y\in(1;+\infty)$. Mums tinka tik reikšmė su ženklu $-$. Atvirkštinė funkcija $f^{-1}(x)=x-\sqrt{x^2-1}$, $x\in(1;+\infty)$.

7. Funkcija $y=ax^2+4x+5$ (parabolė, kai $a\neq 0$) bus monotoninė ir turės atvirkštinę, kai jos viršūnės abscisė $\left(x=-\dfrac{2}{a}\right)$ nepriklausys intervalui $(-2;1)$, t.y. kai a tenkina sąlygas:

$$\left(-\frac{2}{a}\leq -2 \text{ arba } -\frac{2}{a}\geq 1\right)\Rightarrow\left(\frac{a-1}{a}\leq 0 \text{ arba } \frac{a+2}{a}\leq 0\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(0<a\leq 1 \text{ arba } -2\leq a<0\right).$$

Kai $a=0$, $f(x)=4x+5$ yra tiesinė funkcija, turinti atvirkštinę.

Taigi, $f(x)=ax^2+4x+5$, $x\in[-2;1]$ turės atvirkštinę, kai $a\in[-2;1]$.

8. Įrodysime, kad

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\operatorname{arctg}x,\ x\in[0;+\infty).$$

Kai $x\in[0;+\infty)$, tai $-1<\frac{1-x^2}{1+x^2}\le 1$ ir $0\le\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}<\pi$, o

$$0\le\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2},\quad 0\le 2\operatorname{arctg}x<\pi.$$

Taigi abiejų reiškinių reikšmės priklauso intervalui $[0;\pi)$. Apskaičiuosime jų kosinusus ($\cos x$ intervale $[0;\pi)$ yra monotoninė funkcija, todėl iš $\cos\alpha=\cos\beta$ išplaukia $\alpha=\beta$):

$$\cos\left(\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\cos(2\operatorname{arctg}x).$$

Iš čia (pagal formulę $\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$) gauname $\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Vadinasi,

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}-2\operatorname{arctg}x=0,\ \text{kai}\ x\in[0;+\infty).$$

9. Duotą lygybę užrašysime taip:

$$\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}.$$

Kai $x\in(-\infty;-1)$, tai $\frac{1-x}{1+x}\in(-\infty;-1)$. Taigi $\operatorname{arctg}x\in\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right)$ ir $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\in\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right)$, todėl $\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{4}$ ir $-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$

reikšmės priklauso intervalui $\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right)$. Apskaičiavę šių abiejų reiškinių tangentus, įsitikiname, kad jie lygūs:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\right),$$

$$\frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \operatorname{ctg}\operatorname{acrtg}\frac{1-x}{1+x},$$

$$\frac{x+1}{1-x} = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x \in (-\infty; -1).$$

Taigi $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} = -\frac{3\pi}{4}$, kai $x \in (-\infty; -1)$.

10. Kai $x \in [-1; 1]$, tai $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1; 1]$, tada

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin\frac{2x}{1+x^2} \le \frac{\pi}{2} \text{ ir } -\frac{\pi}{4} \le \operatorname{arctg} x \le \frac{\pi}{4}, \ -\frac{\pi}{2} \le 2\operatorname{arctg} x \le \frac{\pi}{2}.$$

Taigi abiejų lygybės pusių reikšmės priklauso intervalui $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Apskaičiuosime jų sinusus ($\sin x$ šiame intervale yra monotoninė funkcija!):

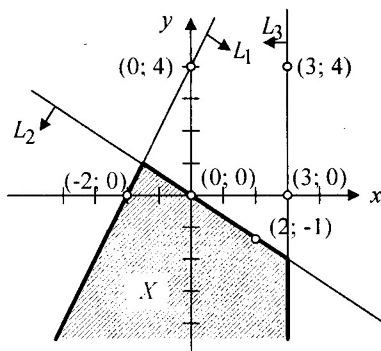
$$\sin\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right) = \sin(2\operatorname{arctg} x), \quad x \in [-1; 1].$$

Kadangi $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, tai $\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$. Taigi

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x, \quad x \in [-1; 1].$$

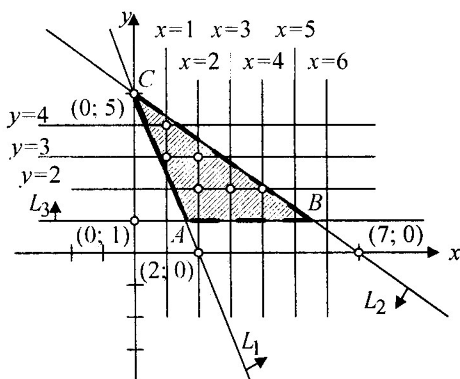
PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pirmiausia brėžiame tiesinių lygčių $2x-y=-4$, $x+2y=0$ ir $x=3$ sprendinių aibių grafikus. Gauname tris tieses (1 pav. jos pažymėtos atitinkamai L_1, L_2 ir L_3). Po to nustatome nelygybių



1 pav.

sprendinių aibes atitinkančias pusplokštumes ir pažymime jas rodyklėmis prie tiesių. Bendrąją dalį subrūkšniuojame (kontūras sričiai priklauso).



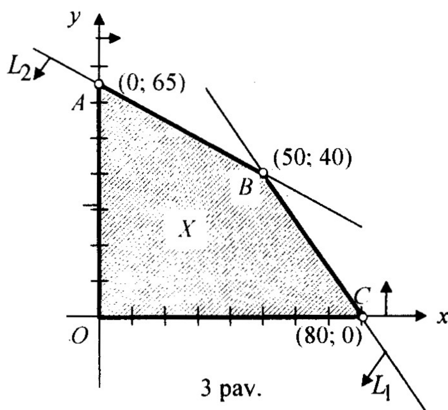
2 pav.

2. Pavaizduojame tiesinių nelygybių sistemos sprendinių aibę (žr. 2 pav.). Gauname trikampiu ABC apribotą sritį (ji subrūkšniuota). Kraštinės AB ir BC sprendinių sričiai nepriklauso.

Toliau sritį padengiame tiesių $x = k$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, ir $y = m$, $m = 2, 3, 4$, tinklu. Tų tiesių sankirtos taškai, esantys trikampio ABC viduje arba atkarpoje AC (be taško C), yra ieškomieji tiesinių nelygybių sistemos sveikaskaičiai sprendiniai.

Ats.: (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (3; 2), (4; 2).

3. Tegu x yra numatomas gaminti detalių D_1 skaičius, o y – detalių D_2 skaičius. Tada pora $(x; y)$ yra bendrasis detalių D_1 ir D_2 gamybos planas.



3 pav.

3.1. Pagal sąlygą planui $(x; y)$ įvykdyti įmonė turi išleisti $40x + 30y$ litų žaliavoms bei $10x + 20y$ litų darbo užmokesčiui. Šioms išlaidoms numatyta atitinkamai 3200 Lt ir 1300 Lt. Taigi gauname dvi nelygybes: $40x + 30y \leq 3200$ ir $10x + 20y \leq 1300$. Aišku, kad skaičiai x ir y negali būti neigiami. Taigi gauname tokią plano komponenčių apribojimų sistemą:

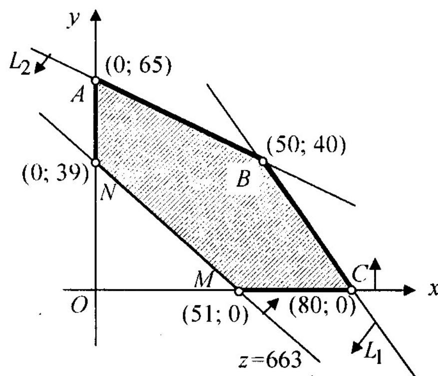
$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 320, \\ x + 2y \leq 130, \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

Šios sistemos sprendinių aibė X yra leistinoji gamybos planų aibė. Pavaizdavę ją grafiškai (žr. 3 pav.), gauname keturkampiu $OABC$ apribotą sritį.

3.2. Tegu z yra laukiamas pelnas. Pagal uždavinio sąlygą $z = 13x + 17y$. Pelną, lygų 663 Lt, atitinkantys detalių gamybos planai $(x; y)$ randami iš lygties

$$13x + 17y = 663.$$

Jos sprendinių aibės grafikas yra lygio tiesė $z = 663$ (žr. 4 pav.), einanti per taškus (51; 0) ir (0; 39). Kai norima gauti pelną, didesnį už 663 Lt, reikia spręsti tiesinę nelygybę $13x + 17y > 663$.



4 pav.

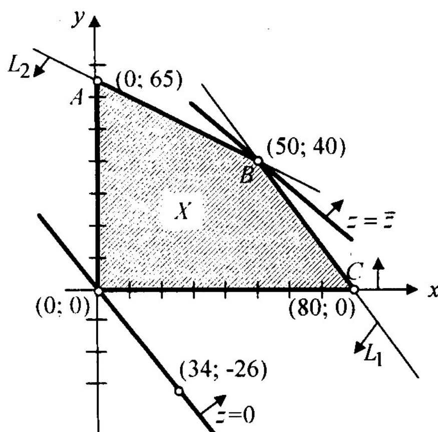
Jos sprendinių aibės dalis, priklausanti leistinajai gamybos planų aibei X, 4 paveiksle yra subrūkšniuota (pusplokštumei testuoti galima pasirinkti tašką (0; 0)) ir pažymėta rodykle prie lygio tiesės.

3.3. Uždavinio matematinis modelis yra toks:

$$\max(13x + 17y), \text{ kai } \begin{cases} 4x + 3y \leq 320, \\ x + 2y \leq 130, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Spręsdami neturėtume užmiršti, kad optimaliojo plano abi komponentės turi būti sveikieji skaičiai (pagal uždavinio pobūdį).

Taikome grafinį metodą. Leistinoji aibė pavaizduota 3 paveiksle, o lygio tiesių $z = 13x + 17y$ kryptys (jos tarpusavyje lygiagrečios) matyti 4 paveiksle. Todėl lengva rasti optimalųjį planą (50; 40) (žr. 5 pav.) bei didžiausią pelną $\bar{z} = 13 \cdot 50 + 17 \cdot 40 = 1330$ (Lt).



5 pav.

Ats.: (50; 40).

4. Tegu x_{ij} yra planuojamo vežti benzino kiekis (tonomis) iš bazės B_i $(i = 1, 2)$ į degalinę D_j $(j = 1, 2, 3)$. Bendrąjį benzino paskirstymo planą užrašykime matrica (lentele)

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}.$$

4.1. Pagal uždavinio sąlygą plano komponentės x_{ij} yra neneigiami skaičiai (nebūtinai sveikieji) ir turi tenkinti šias lygybes:

$$x_{11} + x_{21} = 30,$$
$$x_{12} + x_{22} = 30,$$
$$x_{13} + x_{23} = 30,$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50.$$

Tegu $x = x_{11}$, $y = x_{12}$. Tada $x_{21} = 30 - x$, $x_{22} = 30 - y$, $x_{13} = 40 - x - y$, $x_{23} = x + y - 10$. Taigi ieškomąjį paskirstymo planą galima užrašyti taip:

$$\begin{pmatrix} x & y & 40 - x - y \\ 30 - x & 30 - y & x + y - 10 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Remdamiesi šia plano matrica ir duotąja sąlygoje lentele, apskaičiuojame bendrąsias išlaidas benzinui pirkti ir nugabenti į degalines (pažymėkime jas z):

$$z = 0{,}8x + 0{,}8y + 40 - x - y + 0{,}75(30 - x) + 0{,}9(30 - y) +$$
$$+ 0{,}8(x + y - 10) = 81{,}5 - 0{,}15x - 0{,}3y.$$

Atsižvelgę į plano komponenčių neneigiamumo reikalavimą, gauname šią apribojimų sistemą:

$$\begin{cases} x + y \le 40, \\ x + y \ge 10, \\ x \le 30,\ y \le 30, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

6 pav.

Taigi sprendžiamojo uždavinio matematinis modelis yra toks:

$$\min(81{,}5-0{,}15x-0{,}3y),\ \text{kai}\ \begin{cases} x+y\le 40, \\ x+y\ge 10, \\ x\le 30,\ y\le 30, \\ x\ge 0,\ y\ge 0. \end{cases} \qquad (2)$$

4.2. Optimalaus planavimo uždavinį (2) sprendžiame grafiniu būdu (žr. 6 pav.) ir randame dvi ieškomojo plano optimalias komponentes: $x=10$ ir $y=30$. Šias komponentes įrašome į (1) matricą ir gauname optimalųjį benzino pirkimo ir paskirstymo degalinėms planą.

Ats.: $\begin{pmatrix} 10 & 30 & 0 \\ 20 & 0 & 30 \end{pmatrix}$

4.3. Iš 6 paveikslo matyti, kad bet kuris paskirstymo planas yra blogesnis už (2) uždavinio sprendinį – optimalųjį planą

$$\begin{pmatrix} 10 & 30 & 0 \\ 20 & 0 & 30 \end{pmatrix}.$$

Šio plano įvykdymo kaina (išlaidos benzinui pirkti ir nugabenti į degalines) yra

$$z=0{,}8\cdot 10+0{,}8\cdot 30+0{,}75\cdot 20+0{,}8\cdot 30=71 \text{ (tūkst. Lt)}$$

Patį blogiausią, t.y. brangiausiai kainuojantį, benzino pirkimo ir gabenimo planą galima rasti sprendžiant šį uždavinį:

$$\max(81{,}5-0{,}15x-0{,}3y),\ \text{kai}\ \begin{cases} x+y\le 40, \\ x+y\ge 10, \\ x\le 30,\ y\le 30, \\ x\ge 0,\ y\ge 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Taikant grafinį metodą patogu naudotis tuo pačiu 6 paveikslu. Gautume $x=10$, $y=0$ ir ieškomąjį planą

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 30 \\ 20 & 30 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jo įvykdymo kaina (pažymėkime ją z_{max}) yra

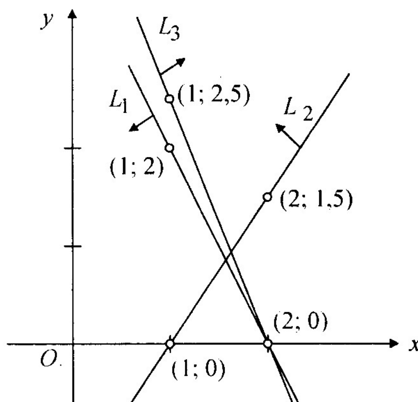
$z_{max} = 0{,}8 \cdot 10 + 1 \cdot 30 + 0{,}75 \cdot 20 + 0{,}9 \cdot 30 = 80$ (tūkst. Lt).

Taigi atsitiktinai planuojant galima prarasti ne daugiau kaip $z_{max} - \bar{z} = 80 - 71 = 9$ tūkstančius litų.

Ats.: 9 tūkst. Lt.

5. Vaizduodami apribojimų sistemos nelygybių $2x + y \le 4$, $3x - 2y \le 3$ ir $5x + 2y \ge 10$ sprendinių aibes grafiškai (žr. 7 pav.), įsitikiname, kad šių aibių sankirta tuščia. Taigi duotasis uždavinys neturi sprendinių.

Ats.: Sprendinių neturi, nes leistinoji aibė tuščia.



7 pav.

6. Sudarykime duomenų lentelę:

Detalės / Namų tipai	D_1	D_2	Butų sk.name
T_1	100	110	12
T_2	200	90	16
Ištekliai	1400	990	

Tegu x yra planuojamas pirmo tipo namų, o y – antro tipo namų skaičius. Tada pora $(x; y)$ yra bendrasis namų statybos planas. Pagal sąlygą gauname tokią apribojimų sistemą:

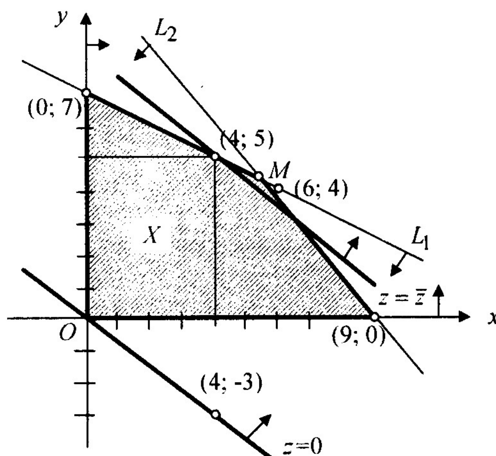
$$\begin{cases} 100x + 200y \le 1400, \\ 110x + \ 90y \le \ 990, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

Butų skaičius z randamas pagal formulę $z = 12x + 16y$.

Taigi namų statybos optimalaus planavimo uždavinio matematinis modelis yra toks:

$$\max(12x + 16y), \text{ kai } \begin{cases} x + 2y \le 14, \\ 11x + 9y \le 99, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Šį uždavinį sprendžiame grafiškai (žr. 8 pav.). Lygio tiesių kryptys tokios kaip tiesės $z = 0$, kurios lygtis yra $12x + 16y = 0$.



8 pav.

Didžiausią reikšmę tikslo funkcija įgyja taške M. Jo koordinates $\left(\dfrac{72}{13}; \dfrac{55}{13}\right)$ randame iš lygčių sistemos

$$\begin{cases} x + 2y = 14, \\ 11x + 9y = 99, \end{cases}$$

nes šiame taške susikerta tiesės L_1 ir L_2. Taško M koordinatės nėra sveikieji skaičiai, todėl pora $\left(\frac{72}{13}; \frac{55}{13}\right)$ nėra duotojo uždavinio sprendinys. Atkreipkime dėmesį į tai, kad rastojo taško M koordinačių apvalinimas ieškant sveikaskaičio optimaliojo plano nėra tikroji išeitis. Šiame uždavinyje apvalindami taško M koordinates gautume tašką (6; 4), nepriklausantį leistinajai aibei (netenkina antrosios nelygybės). Tikrąjį rezultatą (4; 5) randame braižydami lygio tieses.

Ats.: reikia statyti 4 pirmo tipo namus ir 5 antro tipo namus.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. **a)** Kai maišeliai vienodi, užtenka atrinkti vaisius į vieną maišelį, o likusius sudėti į kitą.

Kadangi apelsinai skirtingi ir jų kiekviename maišelyje turi būti ne mažiau kaip 2, tai pirmojo maišelio turinys gali būti: „du apelsinai ir 4 bananai“ arba „trys apelsinai ir trys bananai“. Kai maišeliai laikomi vienodais, pakanka apskaičiuoti keliais būdais galima sukomplektuoti pirmąjį maišelį, t.y. $C_5^2 \cdot 1 = 10$.

b) Kai maišeliai skirtingi, bus $10 + 10 = 20$ būdų, nes maišelių turinius sukeitus, gausime kitokį supakavimą.

Ats.: a) 10; b) 20.

2. Natūralieji skaičiai, kurių skaičių reikia rasti yra „triženkliai, arba keturženkliai, arba penkiaženkliai“. Taigi $m = m_3 + m_4 + m_5$, čia m_3 – rinkinių *aba* skaičius, m_4 – rinkinių *abba* skaičius, m_5 – rinkinių *abcba* skaičius.

Visuose rinkiniuose

$a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Naudodami daugybos taisyklę randame:

$$m_3 = 9 \cdot 10 = 90, \quad m_4 = 9 \cdot 10 = 90, \quad m_5 = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900.$$

Taigi natūraliųjų skaičių, kurie nekinta skaitmenis užrašius atvirkščia tvarka, intervale (100; 100000) yra

$$90 + 90 + 900 = 1080.$$

3. Respublikos rinktinė – „11 žaidėjų iš *A ir* 1 iš *B*“ *arba* „10 iš *A ir* 2 iš *B*“, *arba* „9 iš *A ir* 3 iš *B*“, *arba* „8 iš *A ir* 4 iš *B*“, *arba* „7 iš *A ir* 5 iš *B*“.

Sakinį „*i* žaidėjų iš *A* ir *j* žaidėjų iš *B*“ užrašykime (i, j). Tuomet respublikos rinktinę (rinkinį) galima užrašyti šitaip: „(11, 1) *arba* (10, 2), *arba* (9, 3), *arba* (8, 4), *arba* (7, 5)“. Taigi

$$m = m(11,1) + m(10,2) + m(9,3) + m(8,4) + m(7,5).$$

Pasinaudojame daugybos taisykle ir derinių skaičių formule:

$$m(11,1) = C_{11}^{11} \cdot C_{13}^{1} = 1 \cdot 13 = 13,$$

$$m(10,2) = C_{11}^{10} \cdot C_{13}^{2} = 11 \cdot 78 = 858,$$

$$m(9,3) = C_{11}^{9} \cdot C_{13}^{3} = 55 \cdot 286 = 15730,$$

$$m(8,4) = C_{11}^{8} \cdot C_{13}^{4} = 165 \cdot 715 = 117975,$$

$$m(7,5) = C_{11}^{7} \cdot C_{13}^{5} = 330 \cdot 1287 = 424710.$$

Susumavę šiuos skaičius gauname 559286.

Ats.: Nurodytomis sąlygomis respublikos krepšinio rinktinę galima sudaryti 559286 skirtingais būdais.

4. Komisija – „komisija, sudaryta iš pirmos frakcijos“, *arba* „komisija iš antros frakcijos“, *arba* „komisija iš trečios frakcijos“.

Kadangi frakcijos neturi bendrų narių, tai pagal sudėties taisyklę, gauname $m = m_1 + m_2 + m_3$.

Komisija iš pirmos frakcijos – $(a_1, a_2, a_3, (a_4, a_5))$;

a_1 gali būti parinktas 8 būdais,
a_2 gali būti parinktas 7 būdais,
a_3 gali būti parinktas 6 būdais,

} a_1, a_2, a_3 – gretinys iš 8 po 3.

(a_4, a_5) – derinys iš likusių 5 narių.

Taigi

$$m_1 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot C_5^2 = 3360.$$

Analogiškai

$$m_2 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot C_7^2 = 15120,$$

$$m_3 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot C_8^2 = 27720.$$

Gauname $m = 46200$.

Ats.: Pagal seimo nutarimą 5 žmonių komisiją galima sudaryti 46200 skirtingais būdais.

5. Pasirinktas skaičių šešetukas yra derinys iš 60 po 6. Taigi galimų kortelės užpildymo būdų yra

$$C_{60}^6 = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 50063860.$$

Užpildyta kortelė laiminga – „keturi skaičiai iš tiražo šešetuko ir du skaičiai iš 54 skaičių, neįeinančių į tiražą“, arba „5 skaičiai iš tiražo šešetuko ir 1 skaičius iš 54 skaičių, nepatekusių į tiražą“, arba „6 skaičiai iš tiražo šešetuko“.

Pagal sudėties ir daugybos taisykles, gauname

$$m = C_6^4 \cdot C_{54}^2 + C_6^5 \cdot C_{54}^1 + C_6^6 = 15 \cdot \frac{54 \cdot 53}{2} + 6 \cdot 54 + 1 = 21790.$$

Santykis $\frac{21790}{50063860} \approx 0{,}00044$.

6. Randame galimus raidžių skaičius sekoje. Pažymime i – raidžių a skaičių, j – raidžių b skaičių, c – raidžių j skaičių. Kadangi $0 \le i \le 4$, $0 \le j \le 2$, $0 \le k \le 3$ ir $i + j + k = 7$, tai galimos i, j, k reikšmių kombinacijos yra

2, 2, 3; 3, 2, 2; 3, 1, 3; 4, 0, 3; 4, 1, 2; 4, 2, 1.

Skirtingų sekų skaičių randame pasinaudoję sudėties taisykle ir kartotinių kėlinių skaičių formulėmis:

$$m = P(2,2,3) + P(3,2,2) + P(3,1,3) + P(4,0,3) + P(4,1,2) +$$
$$+ P(4,2,1) =$$

$$= \frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 3!} + \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} + \frac{7!}{3!\cdot 1!\cdot 3!} + \frac{7!}{4!\cdot 0!\cdot 3!} + \frac{7!}{4!\cdot 1!\cdot 2!} + \frac{7!}{4!\cdot 2!\cdot 1!} =$$
$$= 210 + 210 + 140 + 35 + 105 + 105 = 805.$$

7. Kad skaičių (sveikųjų neneigiamų) rinkinys $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$ būtų nelygybės $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 5$ sprendinys, jis turi tenkinti lygybių visumą:

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = 5,$$
$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = 4,$$
$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = 3,$$
$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = 2,$$
$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = 1,$$
$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = 0,$$

t.y. tenkinti bent vieną iš lygybių.

Taigi nelygybės $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 5$ sveikųjų neneigiamų sprendinių skaičius yra lygus lygčių

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = k, \; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

sveikųjų neneigiamų sprendinių skaičių sumai. Lygčių neneigiamų sprendinių skaičių randame tuo pačiu būdu, kaip ir spręsdami 5 pavyzdžio uždavinį. Lygtis $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ turi vieną neneigiamą sveikąjį sprendinį (0, 0, 0, 0, 0).

Lygties $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$ neneigiamų sveikųjų sprendinių skaičius

$$P(1, 4) = \frac{(1+4)!}{1!\cdot 4!} = \frac{5!}{4!} = 5.$$

Lygties $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$ neneigiamų sveikųjų sprendinių skaičius

$$P(2, 4) = \frac{(2+4)!}{2!\cdot 4!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15.$$

Lygties $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$ neneigiamų sveikųjų sprendinių skaičius

$$P(3, 4) = \frac{(3+4)!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

Lygties $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$ neneigiamų sveikųjų sprendinių skaičius

$$P(4, 4) = \frac{(4+4)!}{4!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 70.$$

Lygties $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$ neneigiamų sveikųjų sprendinių skaičius

$$P(5, 4) = \frac{(5+4)!}{5!\cdot 4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126.$$

Nelygybės $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 5$ neneigiamų sveikųjų sprendinių skaičius

$$1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 = 252.$$

Ats.: 252.

8. Algis dovaną – penkis rankšluosčius gali įsigyti pirmoje arba antroje, arba trečioje parduotuvėje. Pagal sudėties taisyklę

$$m = m_1 + m_2 + m_3.$$

Pirmoje parduotuvėje rinksis 5 rankšluosčius iš 3 rūšių – dovana – kartotinis derinys iš 3 po 5. Jų skaičius

$$m_1 = \overline{C}_3^5 = P(5, 3-1) = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = 21.$$

Analogiškai

$$m_2 = \overline{C}_6^5 = P(5, 6-1) = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 252,$$

$$m_3 = \overline{C}_4^5 = P(5, 4-1) = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56.$$

Taigi $m = 21 + 252 + 56 = 329$.

Ats.: Algis dovaną gali sukomplektuoti 329 skirtingais būdais.

9. Polinominė formulė

$$(x+y+z)^9 = \sum_{\substack{i\ge 0,\, j\ge 0,\, k\ge 0 \\ i+j+k=9}} P(i, j, k)x^i y^j z^k.$$

Taigi koeficientas prie $x^3y^3z^3$ yra

$$P(3,3,3)=\frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!}=1680.$$

Koeficientas prie $x^4y^2z^3$ yra

$$P(4,2,3)=\frac{9!}{4!\cdot 2!\cdot 3!}=1260.$$

Koeficientas prie $x^5y^3z^1$ yra

$$P(5,3,1)=\frac{9!}{5!\cdot 3!\cdot 1!}=504.$$

10. Polinominė formulė

$$(x+y+t+z)^3=\sum_{\substack{0\le i,\,0\le j,\,p\le k,\,0\le l\\ i+j+k+l=3}} P(i,j,k,l)x^iy^jt^kz^l.$$

Randame laipsnių rodiklių i, j, k, l visas galimas kombinacijas: $0\le i$, $0\le j$, $0\le k$, $0\le l$, $i+j+k+l=3$. Jas geriausia surašyti taip:

3000,	2100,	1200,	0300,
	2010,	1020,	0030,
	2001,	1002,	0003,
		1110,	0210,
		1101,	0201,
		1011,	0021,
			0120,
			0102,
			0012,
			0111.

Patikriname, ar visos i, j, k, l kombinacijos surašytos. Kadangi $3+0+0+0=0+3+0+0=0+0+3+0=0+0+0+3$, iš viso 4 kombinacijos. Sumą $2+1+0+0$ atitinka $P(0,1,1,2)$ kombinacijų, nes čia imamas vienas dėmuo 2, vienas dėmuo 1 ir du dėmenys lygūs 0. Sumą $1+1+1+0$ atitinka $P(0,0,3,1)$ kombinacijų, nes joje dėmenų 3 ir 2 nėra, vienetas paimtas 3 kartus, o nulis – 1 kartą.

Taigi $4 + P(0,1,1,2) + P(0,0,3,1) = 4 + 12 + 4 = 20$ – galimų i, j, k, l kombinacijų skaičius. Tiek ir surašėme. Kadangi

$$P(3,0,0,0) = P(0,3,0,0) = P(0,0,3,0) = P(0,0,0,3) = 1,$$

$$P(1,2,0,0) = P(1,0,2,0) = \ldots = P(0,0,1,2) = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3,$$

$$P(1,1,1,0) = P(1,1,0,1) = P(1,0,1,1) = P(0,1,1,1) = \frac{3!}{1!} = 6,$$

tai įrašydami į formulę visas galimas i, j, k, l reikšmių kombinacijas ir atitinkamai sugrupavę dėmenis, gauname:

$$(x + y + t + z)^3 = x^3 + y^3 + t^3 + z^3 +$$
$$+ 3(x^2 y + x^2 t + x^2 z + xy^2 + xt^2 + xz^2 + y^2 t + y^2 z + t^2 z +$$
$$+ yt^2 + yz^2 + tz^2) + 6(xyt + xyz + xtz + ytz).$$

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pieštukus pažymėję jų spalvų pirmomis raidėmis ir pirmąja raide žymėdami Petriuko, o antrąja – Jonuko pieštuko spalvas, baigčių aibę galėsime užrašyti šitaip:

$$E = \{žž, žr, žg, žm, rž, rr, rg, rm, ož, or, og, om, gž, gr, gg,$$
$$gm, mž, mr, mg, mm\}.$$

Baigtys vienodai galimos, todėl kiekvienos jų tikimybė $\frac{1}{20}$.

Išreiškiame įvykius elementariaisiais ir apskaičiuojame jų tikimybes:

$$A = \{žž, rr, gg, mm\};$$

$$P(A) = P(žž) + P(rr) + P(gg) + P(mm) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5};$$

$$B = \{žž, žg, žm, ož, og, om, gž, gg, gm, mž, mg, mm\},$$

$$P(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5};$$

$$C = \{\check{z}g, rg, og, g\check{z}, gr, gg, gm, mg\},\ P(C) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Ats.: $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(C) = \frac{2}{5}$.

2. Ištrauktų rutulių spalvas pažymėkime jų pirmosiomis raidėmis. Gauname baigčių aibę

$$E = \{jj, j\check{z}, jb, \check{z}\check{z}, \check{z}b, bb\}.$$

Kadangi kodai *jž* ir *žj*; *jb* ir *bj*; *žb* ir *bž* reiškia tas pačias baigtis, tai galimos ir kitokios E išraiškos. Pavyzdžiui, $E = \{jj, \check{z}j, bj, \check{z}\check{z}, \check{z}b, bb\}$. Bandymo baigtys nėra vienodai galimos, nes, pavyzdžiui, baigtis *jž* yra labiau tikėtina negu *žb*.

Apskaičiuosime baigčių tikimybes, išreikšdami jas klasikinio (modifikuoto) bandymo baigtimis. Mintinai priskiriame juodiems rutuliams numerius 1, 2, 3, 4.; žaliems – 1, 2; baltiems – 1, 2 ir „žymime" juos spalvų pirmosiomis raidėmis:

$$j_1, j_2, j_3, j_4, \check{z}_1, \check{z}_2, b_1, b_2.$$

Taip gauname dėžę su aštuoniais skirtingai pažymėtais rutuliais, iš kurios atsitiktinai parenkame du. Taigi, mintinio eksperimento baigtys yra deriniai iš 8 elementų po 2, jų skaičius $n = C_8^2 = 28$, jos yra vienodai galimos.

Išreiškiame uždavinio eksperimento baigtis šio mintinio eksperimento baigtimis:

$$\{jj\} = \{j_1j_2, j_1j_3, j_1j_4, j_2j_3, j_2j_4, j_3j_4\},\ P(jj) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}.$$

$$\{\check{z}j\} = \{\check{z}_1j_1, \check{z}_1j_2, \check{z}_1j_3, \check{z}_1j_4, \check{z}_2j_1, \check{z}_2j_2, \check{z}_2j_3, \check{z}_2j_4\},$$

$$P\{\check{z}j\} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}.$$

$$\{jb\} = \{j_1b_1, j_1b_2, j_2b_1, j_2b_2, j_3b_1, j_3b_2, j_4b_1, j_4b_2\},$$

$$P\{jb\} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}.$$

$$\{\check{z}\check{z}\} = \{\check{z}_1\check{z}_2\},\ P\{\check{z}\check{z}\} = \frac{1}{28}.$$

$$\{žb\} = \{ž_1b_1, ž_1b_2, ž_2b_1, ž_2b_2\} \text{ , } P\{žb\} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}.$$

$$\{bb\} = \{b_1b_2\} \text{ , } P\{bb\} = \frac{1}{28}.$$

Patikrinę gauname:

$$P\{jj\} + P\{žj\} = P\{jb\} + P\{žž\} + P\{žb\} + P\{bb\} =$$

$$= \frac{3}{14} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} = \frac{6+8+8+1+4+1}{28} = \frac{28}{28} = 1;$$

$$A = \{jž, jb, žb\},\ P(A) = P\{jž\} + P\{jb\} + P\{žb\} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5}{7};$$

$$B = \{žž, žb, bb\},\ P(B) = P\{žž\} + P\{žb\} + P\{bb\} = \frac{1}{28} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} = \frac{3}{14};$$

$$C = \{jb, žb, bb\},$$

$$P(C) = P\{jb\} + P\{žb\} + P\{bb\} = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} = \frac{13}{28}.$$

Ats.: $P(A) = \frac{5}{7}$, $P(B) = \frac{3}{14}$, $P(C) = \frac{13}{28}$.

3. Pažymėkime: n – kauliukas atvirto nedaliu iš 3 skaičiumi, d – kauliukas atvirto daliu iš 3 skaičiumi. Baigčių aibė:

$$E = \{d, nd, nnd, nnnd, nnnnd, nnnnn\}.$$

Eksperimento baigčių tikimybes apskaičiuojame remdamiesi įvykių nepriklausomumu:

$$P(d) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ P(nd) = P(n)\cdot P(d) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{9},$$

$$P(nnd) = P(n)\cdot P(n)\cdot P(d) = \left(\frac{4}{6}\right)^2\cdot\frac{2}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27},$$

$$P(nnnd) = P(n)\cdot P(n)\cdot P(n)\cdot P(d) = \left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{81},$$

Analogiškai gauname

$$P(nnnnd) = \left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{3} = \frac{16}{243},$$

$$P(nnnnn)=\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\frac{1}{3}=\frac{32}{243}.$$

Patikriname, ar elementariųjų įvykių (apskaičiuotųjų) tikimybių suma lygi 1.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\frac{16}{243}+\frac{32}{243}=\frac{81+54+36+24+16+32}{243}=\frac{243}{243}=1.$$

Kadangi $A=\{d, nd, nnd\}$, tai $P(A)=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}=\frac{19}{27}$.

Iš to, kad $B=\{d, nd, nnd, nnnd, nnnnd\}=E\setminus\{nnnnn\}$, išplaukia

$$P(B)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5=1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243}.$$

Kadangi $C=\{d, nnd, nnnnd, nnnnn\}$, todėl

$$P(C)=P(d)+P(nnd)+P(nnnnd)+P(nnnnn)=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{4}{27}+\frac{16}{243}+\frac{32}{243}=\frac{81+36+16+32}{243}=\frac{165}{243}=\frac{55}{81}.$$

Ats.: $P(A)=\frac{19}{27}$, $P(B)=\frac{211}{243}$, $P(C)=\frac{55}{81}$.

4. Pažymėkime A – „matavimo paklaida neneigiama“, $\overline{A}$ – „matavimo paklaida neigiama“. Kadangi $P(A)=0{,}6$, tai $P(\overline{A})=1-0{,}6=0{,}4$. Atliekami 5 nepriklausomi matavimai. Įvykis „neneigiamų paklaidų skaičius mažesnis už neigiamų paklaidų skaičių“ (pažymėkime jį B) išreiškimas šitaip: $B=$ „visos paklaidos neigiamos“ arba „viena paklaida neneigiama ir keturios paklaidos neigiamos“, arba „dvi paklaidos neneigiamos ir trys paklaidos neigiamos“. Dėmenys yra nesutaikomi įvykiai, todėl $P(B)$ lygi dėmenų tikimybių sumai. Dėmenų tikimybes apskaičiuojame naudodamiesi Bernulio schemos formulėmis (žinoma, jas galima apskaičiuoti ir nežinant Bernulio formulės):

P(„visos paklaidos neigiamos“) $=(0{,}4)^5=0{,}01024$;

P(„viena paklaida neneigiama ir keturios neigiamos“) $=$

$=C_5^1\cdot 0{,}6\cdot(0{,}4)^4=5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}0256=0{,}0768$;

P(„dvi paklaidos neneigiamos ir trys paklaidos neigiamos“) =
$= C_5^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^3 = 10 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}064 = 0{,}2304$.
Todėl ieškomoji tikimybė yra
$P(B) = 0{,}01024 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744$.

Ats.: 0,31744.

5. Įvykis A – „mokinys išspręs tik 4 uždavinius“ = „mokinys išspręs 3 algebros uždavinius ir vieną geometrijos uždavinį“ arba „išspręs 2 algebros uždavinius ir 2 geometrijos uždavinius“, arba „išspręs vieną algebros uždavinį ir tris geometrijos uždavinius“. Reikia prisiminti, jog jis bando spręsti visus šešis uždavinius. Pažymėję a – išsprendė algebros uždavinį, $\overline{a}$ – neišsprendė algebros uždavinio, g – išsprendė geometrijos uždavinį, $\overline{g}$ – neišsprendė geometrijos uždavinio, gauname patogias išraiškas.

„Mokinys išspręs 3 algebros uždavinius ir vieną geometrijos uždavinį“ = $(aaa) \cap (g\overline{g}\overline{g})$. Čia $g\overline{g}\overline{g}$ yra įvykis „išsprendė vieną (bet kurį) geometrijos uždavinį iš spręstų trijų“.

„Mokinys išspręs 2 algebros ir 2 geometrijos uždavinius“ = $(aa\overline{a}) \cap (gg\overline{g})$. Čia $(aa\overline{a})$ ir $(gg\overline{g})$ reiškia įvykius „išspręsti du algebros“ ir „išspręsti du geometrijos uždaviniai“ iš spręstų trijų.

„Mokinys išspręs 1 algebros ir 3 geometrijos uždavinius“ = $(a\overline{a}\overline{a}) \cap (ggg)$, čia $a\overline{a}\overline{a}$ – išspręs vieną algebros uždavinį iš spręstų trijų.

Taigi turime išraišką

$$A = ((aaa) \cap (g\overline{g}\overline{g})) \cup ((aa\overline{a}) \cap (gg\overline{g})) \cup ((a\overline{a}\overline{a}) \cap (ggg)).$$

Kadangi dėmenys nesutaikomi įvykiai, o dauginamieji – nepriklausomi įvykiai (pagal sąlygą), tai

$$P(A) = P(aaa) \cdot P(g\overline{g}\overline{g}) + P(aa\overline{a}) \cdot P(gg\overline{g}) + P(a\overline{a}\overline{a}) \cdot P(ggg).$$

Dauginamųjų tikimybes randame pagal Bernulio formules su $n = 3$ ir $p_1 = 0{,}8$, $q_1 = 0{,}2$ ir $p_2 = 0{,}6$, $q_2 = 0{,}4$ (galima skaičiuoti ir be jų):

$$P(aaa)=0{,}8\cdot0{,}8\cdot0{,}8=0{,}512,$$
$$P(g\,\overline{g}\,\overline{g})=C_3^1\cdot(0{,}6)^1\cdot(0{,}4)^2=0{,}288;$$
$$P(a\,a\,\overline{a})=C_3^2\cdot(0{,}8)^2\cdot0{,}2=0{,}384,$$
$$P(g\,g\,\overline{g})=C_3^2\cdot(0{,}6)^2\cdot(0{,}4)^1=0{,}432;$$
$$P(a\,\overline{a}\,\overline{a})=C_3^1\cdot(0{,}8)^1\cdot(0{,}2)^2=0{,}096,$$
$$P(g\,g\,g)=0{,}6\cdot0{,}6\cdot0{,}6=0{,}216.$$

Taigi turime

$$P(A)=0{,}512\cdot0{,}288+0{,}384\cdot0{,}432+0{,}096\cdot0{,}216=$$
$$=0{,}147456+0{,}165888+0{,}020736=0{,}334080\approx0{,}334.$$

Ats.: $\approx 0{,}334$.

6. Pažymėkime b_i – baltas, j_i – juodas rutulys ištrauktas i-ju traukimu. Kadangi Jonas pradeda traukti pirmasis, o Simas antrasis, tai įvykis

$$\text{„laimi Jonas“}=\{j_1,\ b_1b_2j_3,\ b_1b_2b_3b_4j_5\}.$$

Įvykis

$$\text{„laimi Simas“}=\{b_1j_2,\ b_1b_2b_3j_4\}.$$

$$P(\text{„laimi Jonas“})=P(j_1)+P(b_1b_2j_3)+P(b_1b_2b_3b_4j_5),$$
$$P(\text{„laimi Simas“})=P(b_1j_2)+P(b_1b_2b_3j_4).$$

Dėmenų tikimybes apskaičiuojame naudodami įvykių sandaugos tikimybės formulę (bendrąjį atvejį):

$$P(j_1)=\frac{5}{9},\quad P(b_1j_2)=P(b_1)\cdot P(j_2\mid b_1)=\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{18},$$

$$P(b_1b_2j_3)=P(b_1)\cdot P(b_2\mid b_1)\cdot P(j_3\mid b_1b_2)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{42},$$

$$P(b_1b_2b_3j_4)=P(b_1)\cdot P(b_2\mid b_1)\cdot P(b_3\mid b_1b_2)\cdot P(j_4\mid b_1b_2b_3)=$$
$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{126},$$

$P(b_1b_2b_3b_4j_5)=$

$=P(b_1)\cdot P(b_2\mid b_1)\cdot P(b_3\mid b_1b_2)\cdot P(b_4\mid b_1b_2b_3)\cdot P(j_5\mid b_1b_2b_3b_4)=$

$=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}=\frac{1}{126}.$

Taigi gauname:

$P(\text{„laimi Jonas“})=\frac{5}{9}+\frac{5}{42}+\frac{1}{126}=\frac{70+15+1}{126}=\frac{86}{126}=\frac{43}{63},$

$P(\text{„laimi Simas“})=\frac{5}{18}+\frac{5}{126}=\frac{35+5}{126}=\frac{40}{126}=\frac{20}{63}.$

Ats.: $\frac{43}{63},\frac{20}{63}.$

7. Nagrinėjamąją įvykių sankirtą užrašykime taip:

$$A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4=(A_1\cap A_2\cap A_3)\cap A_4. \quad (1)$$

Tuomet pasinaudoję formule $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\mid A)$, gauname

$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=P(A_1\cap A_2\cap A_3)\cdot P(A_4\mid A_1\cap A_2\cap A_3)$.(2)

Kadangi $A_1\cap A_2\cap A_3=(A_1\cap A_2)\cap A_3$, tai

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1\cap A_2)\cdot P(A_3\mid A_1\cap A_2) \quad (3)$$

Galų gale

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1). \quad (4)$$

Nuosekliai įrašę (4) išraišką į (3), po to gautą išraišką į (2), gausime

$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=$

$=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot P(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdot P(A_4\mid A_1\cap A_2\cap A_3).$

8. Pažymėkime A įvykį „vairuotojas pateko į avariją“, E – būtinąjį įvykį. Tuomet

$$A=A\cap E=A\cap(H_1\cup H_2\cup H_3)=(H_1\cap A)\cup(H_2\cap A)\cup(H_3\cap A)$$

Dėmenys yra nesutaikomi įvykiai, todėl

$P(A)=P(H_1\cap A)+P(H_2\cap A)+P(H_3\cap A)=$

$=P(H_1)\cdot P(A\mid H_1)+P(H_2)\cdot P(A\mid H_2)+P(H_3)\cdot P(A\mid H_3).$

Pagal sąlygą turime:

$$P(H_1)=0{,}5, \quad P(H_2)=0{,}3, \quad P(H_3)=0{,}2,$$

$$P(A\,|\,H_1)=0{,}01, \quad P(A\,|\,H_2)=0{,}03, \quad P(A\,|\,H_3)=0{,}10.$$

Todėl

$$P(A)=0{,}5\cdot 0{,}01+0{,}3\cdot 0{,}03+0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}005+0{,}009+0{,}02=0{,}034,$$

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{P(H_1\cap A)}{P(A)}=\frac{P(H_1)P(A\,|\,H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}005}{0{,}034}\approx 0{,}147,$$

$$P(H_2\,|\,A)=\frac{P(H_2\cap A)}{P(A)}=\frac{P(H_2)P(A\,|\,H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}009}{0{,}034}\approx 0{,}265,$$

$$P(H_3\,|\,A)=\frac{P(H_3\cap A)}{P(A)}=\frac{P(H_2)P(A\,|\,H_3)}{P(A)}=\frac{0{,}02}{0{,}034}\approx 0{,}587.$$

Vairuotojas, padaręs avariją, su didžiausia tikimybe ($\approx 0{,}587$) priklauso dažniausiai rizikuojančių (nutrūktagalvis) klasei H_3.

Ats.: $\approx 0{,}147$, $\approx 0{,}265$, $\approx 0{,}587$.

9. Pažymėkime atsitiktinio dydžio $X+Y$ reikšmių tikimybes $P(X+Y=x_i+y_j)=q_{ij}$, $i=1,2,3,4,5$, $j=1,2,3,4$. Tuomet atsitiktinio dydžio $X+Y$ matematinė viltis yra

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(X+Y)=\\
&=(x_1+y_1)q_{11}+(x_1+y_2)q_{12}+(x_1+y_3)q_{13}+(x_1+y_4)q_{14}+\\
&\quad+(x_2+y_1)q_{21}+(x_2+y_2)q_{22}+(x_2+y_3)q_{23}+(x_2+y_4)q_{24}+\\
&\quad+(x_3+y_1)q_{31}+(x_3+y_2)q_{32}+(x_3+y_3)q_{33}+(x_3+y_4)q_{34}+\\
&\quad+(x_4+y_1)q_{41}+(x_4+y_2)q_{42}+(x_4+y_3)q_{43}+(x_4+y_4)q_{44}+\\
&\quad+(x_5+y_1)q_{51}+(x_5+y_2)q_{52}+(x_5+y_3)q_{53}+(x_5+y_4)q_{54}.
\end{aligned}$$

Pergrupavę dėmenis, gauname:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X+Y)=[&x_1(q_{11}+q_{12}+q_{13}+q_{14})+\\
&+x_2(q_{21}+q_{22}+q_{23}+q_{24})+\\
&+x_3(q_{31}+q_{32}+q_{33}+q_{34})+
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+x_4(q_{41}+q_{42}+q_{43}+q_{44})+\\
&+x_5(q_{51}+q_{52}+q_{53}+q_{54})]+\\
&+[y_1(q_{11}+q_{21}+q_{31}+q_{41}+q_{51})+\\
&+y_2(q_{12}+q_{22}+q_{32}+q_{42}+q_{52})+\\
&+y_3(q_{13}+q_{23}+q_{33}+q_{43}+q_{53})+\\
&+y_4(q_{14}+q_{24}+q_{34}+q_{44}+q_{54})].
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Pastebime, jog

$$
\begin{aligned}
q_{i1}+q_{i2}+q_{i3}+q_{i4} &= P(X+Y=x_i+y_1)+P(X+Y=x_i+y_2)+\\
&+P(X+Y=x_i+y_3)+P(X+Y=x_i+y_4)=\\
&=P\{X=x_i\}=p_i,
\end{aligned}
$$

nes dydis Y įgyja tik reikšmes y_1, y_2, y_3, y_4. Čia $i=1, 2, 3, 4, 5$.

Analogiškai

$$
\begin{aligned}
&q_{1j}+q_{2j}+q_{3j}+q_{4j}+q_{5j}=\\
&=P(X+Y=x_1+y_j)+P(X+Y=x_2+y_j)+\\
&+P(X+Y=x_3+y_j)+P(X+Y=x_4+y_j)+\\
&+P(X+Y=x_5+y_j)=P(Y=y_j)=q_j, \quad j=1,2,3,4,
\end{aligned}
$$

nes dydis X įgyja tik reikšmes x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Įrašę gautas reikšmes į (5) formulę, gauname

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(X+Y)=(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5)+\\
&+(y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3+y_4q_4)=\mathrm{E}X+\mathrm{E}Y.
\end{aligned}
$$

10. Bandymo baigtis pažymėkime skaičių poromis. Gausime šitokių baigčių aibę:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}=\{&(1,-3),(1,-2),(1,-1),(1,1),(1,2),(1,3),\\
&(2,-3),(2,-2),(2,-1),(2,1),(2,2),(2,3),\\
&(3,-3),(3,-2),(3,-1),(3,1),(3,2),(3,3),\\
&(4,-3),(4,-2),(4,-1),(4,1),(4,2),(4,3),\\
&(5,-3),(5,-2),(5,-1),(5,1),(5,2),(5,3),\\
&(6,-3),(6,-2),(6,-1),(6,1),(6,2),(6,3)\}.
\end{aligned}
$$

Baigčių skaičius 36. Visos baigtys vienodai galimos.

Atsitiktinio dydžio X reikšmės: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Šių reikšmių tikimybės yra:

$$P\{X=-2\}=P(1,-3)=\frac{1}{36},$$

$$P\{X=-1\}=P(1,-2)+P(2,-3)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{2}{36},$$

$$P\{X=0\}=P(1,-1)+P(2,-2)+P(3,-3)=\frac{3}{36},$$

$$P\{X=1\}=P(2,-1)+P(3,-2)+P(4,-3)=\frac{3}{36},$$

$$P\{X=2\}=P(1,1)+P(3,-1)+P(4,-2)+P(5,-3)=\frac{4}{36},$$

$$P\{X=3\}=P(1,2)+P(2,1)+P(4,-1)+P(5,-2)+P(6,-3)=\frac{5}{36},$$

$$P\{X=4\}=P(1,3)+P(2,2)+P(3,1)+P(5,-1)+P(6,-2)=\frac{5}{36},$$

$$P\{X=5\}=P(2,3)+P(3,2)+P(4,1)+P(6,-1)=\frac{4}{36},$$

$$P\{X=6\}=P(3,3)+P(4,2)+P(5,1)=\frac{3}{36},$$

$$P\{X=7\}=P(4,3)+P(5,2)+P(6,1)=\frac{3}{36},$$

$$P\{X=8\}=P(5,3)+P(6,2)=\frac{2}{36},$$

$$P\{X=9\}=P(6,3)=\frac{1}{36}.$$

Kad būtų patogiau, skirstinį užrašome lentele:

x_k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_k	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Apskaičiuojame matematinę viltį:

$$\mathrm{E}X=\frac{1}{36}(-2+(-1)\cdot 2+0\cdot 3+1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 5+.$$

$$+5\cdot 4+6\cdot 3+7\cdot 3+8\cdot 2+9\cdot 1)=\frac{7}{2}.$$

Apskaičiuojame dispersiją:

$$\mathrm{D}X=\frac{1}{36}\left(\left(-2-\frac{7}{2}\right)^2+\left(-1-\frac{7}{2}\right)^2\cdot 2+\left(0-\frac{7}{2}\right)^2\cdot 3+\left(1-\frac{7}{2}\right)^2\cdot 3+\right.$$

$$=\left(2-\frac{7}{2}\right)^2\cdot 4+\left(3-\frac{7}{2}\right)^2\cdot 5+\left(4-\frac{7}{2}\right)^2\cdot 5+\left(5-\frac{7}{2}\right)^2\cdot 4+$$

$$\left.+\left(6-\frac{7}{2}\right)^2\cdot 3+\left(7-\frac{7}{2}\right)^2\cdot 3+\left(8-\frac{7}{2}\right)^2\cdot 2+\left(9-\frac{7}{2}\right)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4\cdot 36}(121+162+147+75+36+5+5+36+75+147+$$

$$+162+121)=\frac{91}{12}.$$

Ats.: $\mathrm{E}X=3{,}5$, $\mathrm{D}X=\dfrac{91}{12}$.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kompleksiniai skaičiai z_1 ir z_2 yra lygūs, kai jų realiosios ir menamosios dalys yra lygios. Mūsų atveju turėsime: $3x-5y=2$ ir $5x-3y=14$. Realiosioms x ir y reikšmėms rasti turime išspręsti lygčių sistemą:

$$\begin{cases}3x-5y=2, & \Big|\,5\\ 5x-3y=14. & \Big|-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}15x-25y=10,\\ -15x+9y=-42\end{cases}$$

$$-16y=-32\Rightarrow y=2.$$

Iš pirmosios lygties

$$3x=12\Rightarrow x=4.$$

Ats.: (4; 2).

2. $6i - 8i^2 + \dfrac{(5+2i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} - \dfrac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} =$

$= 6i + 8 + \dfrac{10+4i+25i-10}{4+25} - \dfrac{12-16i-9i-12}{16+9} =$

$= 6i + 8 + \dfrac{29i}{29} + \dfrac{25i}{25} = 6i + 8 + i + i = 8 + 8i = 8(1+i)$, čia visur $i^2 = -1$.

Ats.: $8(1+i)$.

3. Kompleksinio skaičiaus $z = x + iy$ modulis $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, o argumentas $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$; $k \in Z$, kur $\varphi_0 = \arg z$. Kai $z = -\sqrt{3} + i$, tai

$$|z| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2, \quad \varphi_0 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

nes kompleksinis skaičius yra antrajame ketvirtyje ($x < 0$, $y > 0$).

Tada visos argumento reikšmės $\varphi = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$.

Ats.: $|z| = 2$; $\varphi = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$.

4. Skaičiaus $z = x + iy$ trigonometrinė forma yra $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kur $r = |z|$, o φ – kompleksinio skaičiaus vienas iš argumentų (gali būti ir φ_0). Duotojo skaičiaus modulis

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \text{ o}$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 1} - \pi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Tada $z = 1\cdot\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

Ats.: $z = \cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

5. Žinoma, kad

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

Taikydami šią formulę mūsų uždaviniui, turėsime:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4\,(\cos 140^\circ+i\sin 140^\circ)}{2\,(\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ)}=\frac{4}{2}(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)=2\cdot i=2i,$$

nes $\cos 90^\circ=0$, o $\sin 90^\circ=1$.

Ats.: 2i.

6. Kadangi

$$i^n=\begin{cases}1, & \text{kai } n=4k,\\ i, & \text{kai } n=4k+1,\\ -1, & \text{kai } n=4k+2,\\ -i, & \text{kai } n=4k+3,\ k\in N,\end{cases}$$

tai mūsų atveju bus

$i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$

$=i^{4+2}+i^{4\cdot4}+i^{4\cdot6+2}+i^{4\cdot9}+i^{4\cdot11+2}+i^{4\cdot14}=$

$-1+1-1+1-1+1=0$.

Ats.: 0.

7. Pradžioje atliekame veiksmus skliausteliuose – skaitiklį ir vardiklį dauginame iš vardikliui jungtinio kompleksinio skaičiaus:

$$\left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^8=\left(\frac{(1-i)^2}{1-i^2}\right)^8=\left(\frac{1-2i+i^2}{1+i}\right)^8=\left(\frac{1-2i-1}{2}\right)^8=$$

$$=(-i)^8=i^8=i^{4\cdot2}=1.$$

Ats.: 1.

8. Sprendžiame bikvadratinę lygtį pažymėdami $x^2=y$. Tada mūsų lygtis užrašoma:

$$y^2 + 7y + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = -\frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} -\frac{7}{2} + \frac{3}{2} = -2, \\ -\frac{7}{2} - \frac{3}{2} = -5. \end{cases}$$

Randame, kad $y_1 = -5$, $y_2 = -2$. Kadangi $x^2 = y$, tai

$$x^2 = -5 \Rightarrow x_{1,2} = \pm i\sqrt{5} \quad x^2 = -2 \Rightarrow x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}.$$

Ats.: $\pm i\sqrt{5}$; $\pm i\sqrt{2}$.

9. Šaknies reikšmes randame naudodamiesi formule:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right),$$

čia φ_0 – pagrindinė kompleksinio skaičiaus z argumento reikšmė, $r = |z|$, $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Užrašome skaičių -16 trigonometrine forma, t.y. $-16 = 16(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi))$. Tada

$$w_k = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\left(\cos(2k+1)\frac{\pi}{4} + i\sin(2k+1)\frac{\pi}{4}\right),$$

čia $k = 0, 1, 2, 3$.

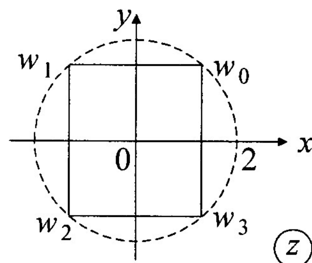
Iš čia, kai $k = 0$, $w_0 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1+i)$,

kai $k = 1$, $w_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(-1+i)$,

kai $k = 2$, $w_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(-1-i)$,

$$\text{kai } k=3,\quad w_3 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,(1-i).$$

Norėdami pavaizduoti šias reikšmes, t. y. w_0, w_1, w_2 ir w_3, geometriškai, z plokštumoje brėžiame apskritimą su centru koordinačių pradžioje ir spinduliu $r = \sqrt[4]{16} = 2$ (žr. pav.). Į nubrėžtą apskritimą įbrėžiame taisyklingą keturkampį (kvadratą), kurio viršūnės ir bus mūsų šaknies reikšmių geometrinis vaizdas.



10. Pažymime $x = \sqrt[3]{\frac{1}{27}y} = \frac{1}{3}y$. Tada

$$27x^3 + 1 = 27 \cdot \frac{1}{27} \cdot y^3 + 1 = y^3 + 1 = 0.$$

Spręsdami lygtį $y^3 + 1 = 0$, gauname $y = \sqrt[3]{-1}$ arba

$$y_k = \sqrt[3]{\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)} = \cos(2k+1)\frac{\pi}{3} + i\sin(2k+1)\frac{\pi}{3};$$

čia $k = 0, 1, 2.$

Kai $k=0$, $y_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$,

kai $k=1$, $y_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$,

kai $k=2$, $y_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.

Tada $x_1 = \frac{1}{6}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{6}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.

Ats.: $-\frac{1}{3}$ ir $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{6}$.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
$(145244)_6$	$\frac{123}{180} \approx 0{,}6833$	$2^{20}, \frac{3\pi}{4}$	Lina – Druskininkuose, Rita – Utenoje, Monika – Rokiškyje



Leidykla DANIELIUS, SL 1368
Spausdino UAB "BSPB"
Užs. Nr. 333